0.1 Driehoeken

In zijn boek Modern Graph Theory geeft Béla Bollobás in Theorem I.2 een eenvoudige stelling over grafen, waarvan het bewijs net iets ingewikkelder is dan de resultaren die we tot nu toe gezien hebben. Het geeft een voldoende voorwaarde voor een graaf om een driehoek te moeten bevatten, dus een drietal knopen die volledig met elkaar verbonden zijn.

Om het bewijs te kunnen geven moeten we eerst iets weten over gemiddelden. Voor een rij getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ is het rekenkundig gemiddelde gelijk aan $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ oftewel $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$. Het kwadratisch gemiddelde is gelijk aan $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$ oftewel $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^2}$. Het kwadratisch gemiddelde is verwant aan de standaarddeviatie uit de statistiek. Altijd geldt dat het rekenkundig gemiddelde niet groter is dan het kwadratisch gemiddelde: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^2}$ dus $(\sum_{i=1}^n a_i)^2 \leq n\sum_{i=1}^n a_i^2$. In het bewijs van de stelling gebruiken we dit feit voor de rij van graden van de knopen van de graaf.

0.1 Stelling. *De graaf $G(V,E)$ heeft $n = |V|$ knopen en $e = |E|$ lijnen.*
Als $e > n^2/4$, dan bevat G een driehoek. □

Het bewijs maakt gebruik van *contrapositie*: in plaats van $P \Rightarrow Q$ ('als het regent dan word je nat') laten we zien dat $\neg Q \Rightarrow \neg P$ ('als je niet nat wordt dan regent het niet').

Bewijs. Voor een knoop x voeren we de notatie $\Gamma(x)$ in voor de buren van x: $\Gamma(x) = \{\, y \in V \mid \{x,y\} \in E \,\}$. De graad van een knoop x is dus precies het aantal elementen in $\Gamma(x)$: $|\Gamma(x)| = \deg(x)$.

Neem aan dat G geen driehoek bevat. Als twee knopen x en y buren zijn, dus $\{x,y\} \in E$, dan hebben x en y geen buren gemeenschappelijk: $\Gamma(x) \cap \Gamma(y) = \varnothing$. Immers, als er een gemeenschappelijke buur z zou zijn vormen x,y,z een driehoek. Omdat $\Gamma(x) \cup \Gamma(y) \subseteq V$, en omdat de verzamelingen disjunct zijn, geldt $|\Gamma(x)| + |\Gamma(y)| = \deg(x) + \deg(y) \leq n$.

Voor alle e lijnen $\{x,y\} \in E$ tellen we $\deg(x) + \deg(y)$ bij elkaar op. Omdat deze waarde steeds maximaal n is, komt daar maximaal ne uit. In deze optelling zien we de bijdrage $\deg(x)$ van knoop x even vaak als x aanliggende lijnen heeft, dus $\deg(x)$ keer. Kortom $\sum\limits_{x\in V} \deg(x)^2 = \sum\limits_{\{x,y\}\in E} \deg(x) + \deg(y) \leq ne$.

Kwadrateer de bekende gelijkheid $\sum_{x\in V} \deg(x) = 2e$, dus $(\sum_{x\in V} \deg(x))^2 = 4e^2$. We gebruiken dit in de regel voor de gemiddelden,
$4e^2 = (\sum_{x\in V} \deg(x))^2 \leq n \cdot \sum_{x\in V} \deg(x)^2 \leq n^2 e$, kortom $e \leq n^2/4$. Precies wat bewezen moest worden. □

De grens uit de stelling is scherp, dat wil zeggen dat deze niet verbeterd kan worden. [opgave voor volgende week!]

Een vroege publicatie over dit onderwerp is meer dan een eeuw oud. (W. Mantel, Vraagstuk XXVIII, Wiskundige Opgaven 10 (1906) 60–61) Het abstracte begrip graaf bestond toen nog niet. Het probleem werd als volgt gesteld: *Er zijn eenige punten gegeven waarvan geen vier in een zelfde vlak liggen. Hoeveel rechten kan men hoogstens tusschen die punten trekken zonder driehoeken te vormen?*