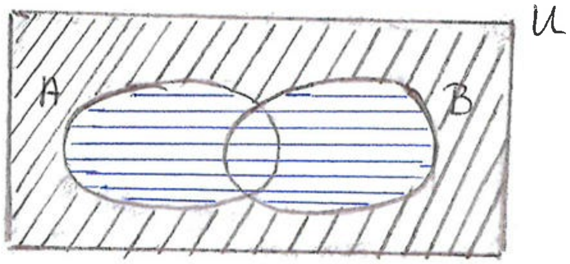
# Uitwerking toets Fundamentele Informatica 1
## oktober 2018

1(a)

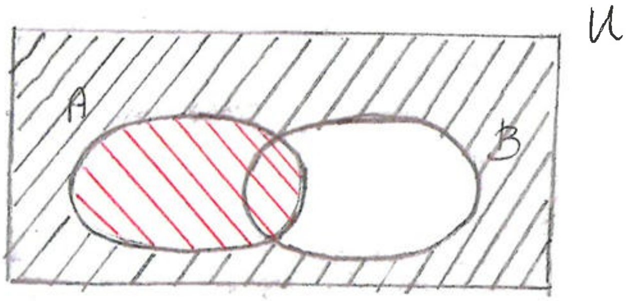
1.




≡ $A \cup B$

/// $(A \cup B)^c$

2.




\\\ $A$

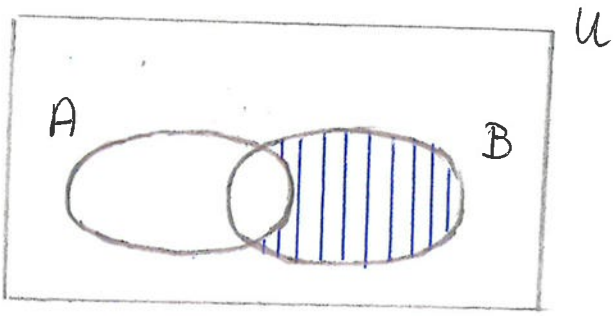
/// $(A \cup B)^c$

$A \cup (A \cup B)^c$ :
alles wat \\\ of /// is.

$\Downarrow$

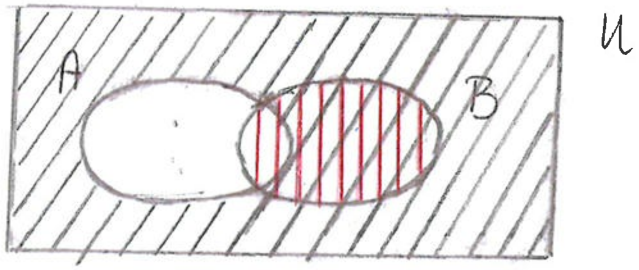
$(A \cup (A \cup B)^c)^c$ :
alles wat in 2. wit is

3.




||| $= (A \cup (A \cup B)^c)^c$

4.




/// $A^c$

||| $B$

$B \cap A^c$

dit gebied in 4. is precies hetzelfde als ||| in 3.

Q.E.D.

1(b) $(A \cup (A \cup B)^c)^c$ = De Morgan

$A^c \cap ((A \cup B)^c)^c$ = dubbel complement

$A^c \cap (A \cup B)$ = distributiviteit

$(A^c \cap A) \cup (A^c \cap B)$ = (commutativiteit +) complement

$\emptyset \cup (A^c \cap B)$ = (commutativiteit +) nulelement (identity)

$A^c \cap B$ = commutativiteit

$B \cap A^c$

2. "$\Rightarrow$" stel dat $A = A \cup B$.

Neem $b \in B$, dan $b \in A \cup B = A$, dus $b \in A$ $\Rightarrow B \subseteq A$

(want elke $b \in B$ zit ook in $A$, zagen we hierboven)

"$\Leftarrow$" Stel dat $B \subseteq A$. We moeten nu bewijzen dat $A = A \cup B$.

Het is duidelijk dat $A \subseteq A \cup B$, dus we moeten alleen aantonen dat $A \cup B \subseteq A$.

Neem willekeurige $x \in A \cup B \Rightarrow x \overset{(i)}{\in} A$ of $x \overset{(ii)}{\in} B \underset{\text{gegeven}}{\subseteq} A$,

dus in beide gevallen volgt dat $x \in A$.

Conclusie: $A \cup B \subseteq A$. (zie ook Schaum, opgave 1.8)

3. $V = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$ V bevat dus 3 elementen.

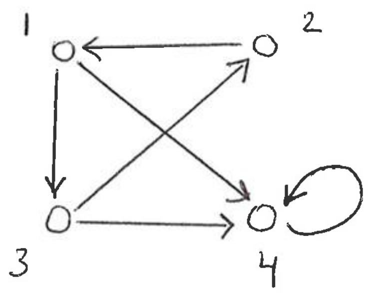
(a). $V \times V = \{(1,1), (1, \{1\}), (1, \{1, \{1\}\}), (\{1\}, 1),$
$(\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{1, \{1\}\}),$
$(\{1, \{1\}\}, 1), (\{1, \{1\}\}, \{1\}),$
$(\{1, \{1\}\}, \{1, \{1\}\})\}$ 9 elementen.

(b) $\mathcal{P}(V)$: alle deelverzamelingen van V. Bevat dus $2^3 = 8$ elementen.

$$\mathcal{P}(V) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{\{1,\{1\}\}\}, \{1,\{1\}\},$$
$$\{1,\{1,\{1\}\}\}, \{\{1\},\{1,\{1\}\}\},$$
$$\{1,\{1\},\{1,\{1\}\}\} \}$$

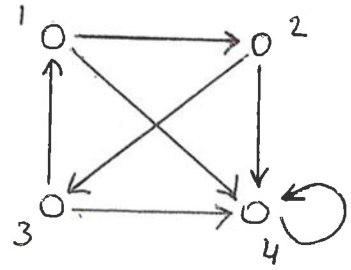
Dus $\mathcal{P}(V) \cap V = \{\{1\}, \{1,\{1\}\}\}$

4\.
(a)



niet streng samenhangend, want er is geen gericht pad van 4 naar 2 (wel van 2 naar 4)

(b)



$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

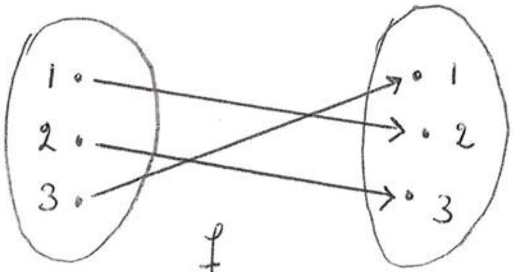
5\. $x S y \longleftrightarrow x^2 \geq y$.

(i) geldt $x S x$? Ja, want $x^2 \geq \underbrace{x}_{\text{voor alle } x \in V}$ omdat $x \geq 1$ voor alle $x \in V$.

(ii) er geldt <u>niet</u> dat als $x S y$ dan ook $y S x$ voor alle $x, y \in V$
Immers; bijv. $5^2 \geq 2$, maar <u>niet</u> $2^2 \geq 5$

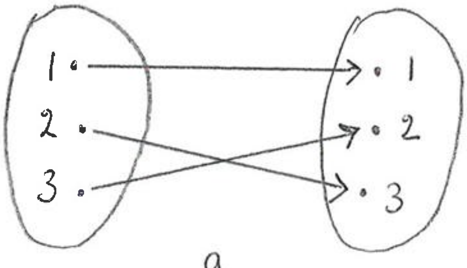
(iii) er geldt <u>niet</u>: als $x S y$ en $y S z$ dan $x S z$ voor alle $x, y, z \in V$.
Immers; bijv. $2^2 \geq 3$ en $3^2 \geq 5$, maar <u>niet</u> $2^2 \geq 5$.

6



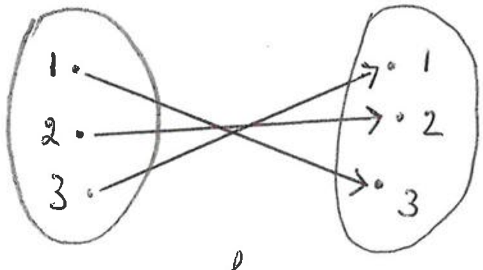
$f$
(bijectief)

$X = \{1, 2, 3\}$



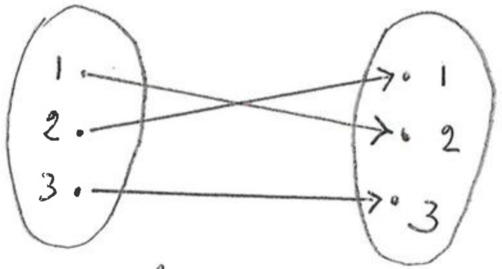
$g$
(bijectief)

Nu is:



$g \circ f$
(eerst $f$, dan $g$)

het is duidelijk dat $g \circ f \neq f \circ g$



$f \circ g$
(eerst $g$, dan $f$)

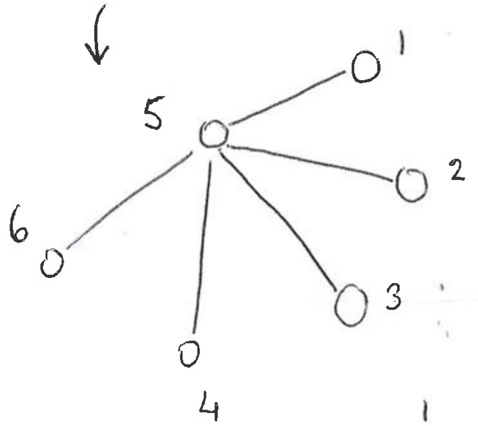
Opmerking: voor een verzameling $X$ met 2 elementen is geen voorbeeld te vinden. Er bestaan dan maar 2 verschillende bijecties en hun samenstelling **levert in** beide gevallen ($f \circ g$ en $g \circ f$) hetzelfde op.

7. (a) Gebruik de stelling dat $\sum_{i \in V} \deg(i) = 2|E|$, dus de som der graden moet even zijn.

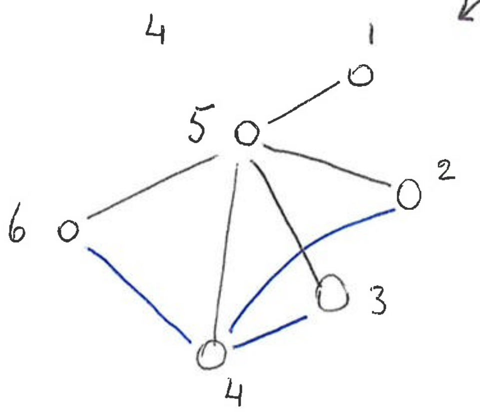
In dit geval: $\underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + 5}_{= 15 \text{ is oneven}} + \deg(6)$ is even $\Big\} \Rightarrow$

de graad van 6 ($= \deg(6)$) moet oneven zijn.

(b) 6 knopen; de graad van 5 is 5, dus 5 heeft een lijn naar elke andere knoop:

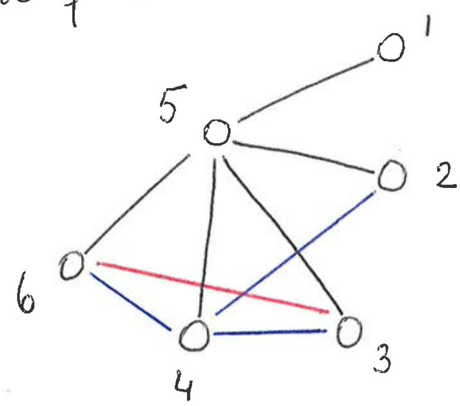


knoop 1 en 5 zijn nu "klaar".
knoop 4 heeft graad 4, dus moet nog 3 lijnen krijgen; deze moeten naar 2, 3 en 6 gaan



knoop 2 en 4 zijn nu ook helemaal klaar; knoop 3 moet nog 1 lijn erbij hebben. Die moet dus naar 6 lopen, waarmee 6 graad 3 krijgt.

Antwoord 7 (b) is dus:




8 (a) Gegeven: $G$ is bipartiet, d.w.z. $V = V_1 \cup V_2$ met $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ en elke lijn loopt tussen een knoop uit $V_1$ en een knoop uit $V_2$.

Stel nu dat $G$ een cykel heeft: $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_k = v_0$

De lengte van deze cykel is $k$.

Laat $v_0 \in V_1^* \Rightarrow v_1 \in V_2 \Rightarrow v_2 \in V_1 \Rightarrow v_3 \in V_2 \Rightarrow v_4 \in V_1 \Rightarrow \cdots$

Dus $v_i \in V_1$ als $i$ even is en $v_i \in V_2$ als $i$ oneven is

Omdat $v_k = v_0$ moet $v_k$ in $V_1$ zitten, dus moet $k$ even zijn.

Dus: als $G$ een cykel heeft moet deze even lengte hebben.

(b) - Linkergraaf:

opsplitsing van de knopen: $V_1 = \{g, f, c, e\}$
$V_2 = \{a, b, d\}$.

Elke lijn loopt nu tussen een knoop uit $V_1$ en een knoop uit $V_2$

↳ teken een plaatje

Vinden van een opsplitsing:

kies $g \in V_1$, dan moeten $a$ en $d$ in $V_2$, en dan moeten $f$, $e$ en $c$ in $V_1$, etcetera.

- Rechtergraaf: deze is niet bipartiet, want $G$ heeft een cykel ter lengte 5, namelijk $f, g, d, c, b, f$. Volgens (a) kan $G$ dan ook niet bipartiet zijn.

Alternatief: deel de knopen in in verzamelingen $V_1$ en $V_2$, net als bij de linkergraaf hierboven (ofwel: kleur de knopen "om en om" met twee kleuren): $g$ in $V_1$, dan moeten $f$, $a$ en $d$ in $V_2$, en dan dus $b$, $e$ en $c$ in $V_1$. Echter er zit een lijn tussen $b$ en $c$, dus dit kan niet.

* natuurlijk geheel analoog als $v_0 \in V_2$. We mogen dus wel aannemen dat $v_0 \in V_1$.