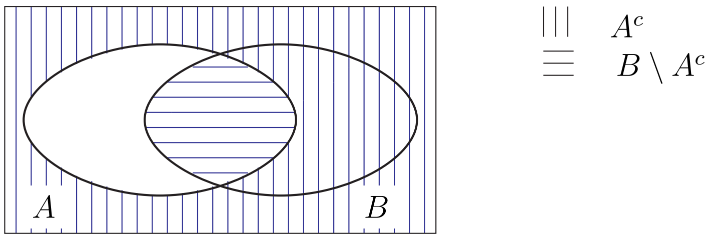
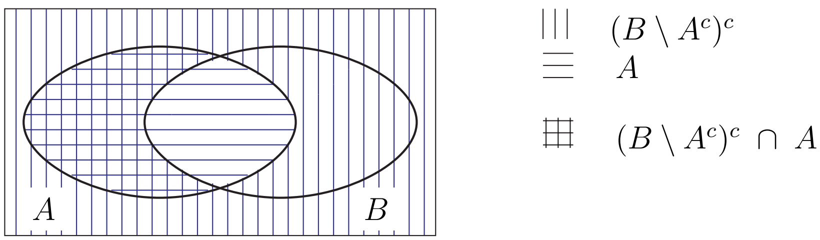
Uitwerking tentamen Fundamentele Informatica 1
8 januari 2018

1) **a.** $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ en $x \notin B \Leftrightarrow x \in A$ en $x \in B^c \Leftrightarrow x \in A \cap B^c$

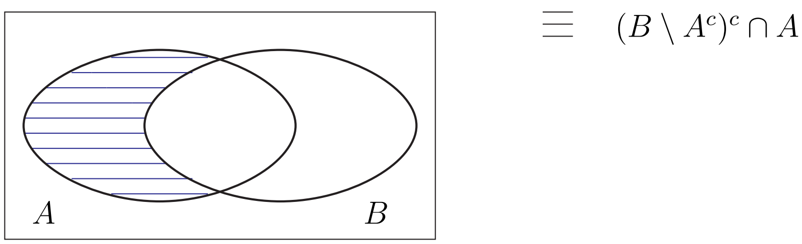
b. Construeer eerst $B \setminus A^c$.



En daaruit $(B \setminus A^c)^c \ \cap \ A$



We vatten samen, en tekenen $(B \setminus A^c)^c \cap A$.



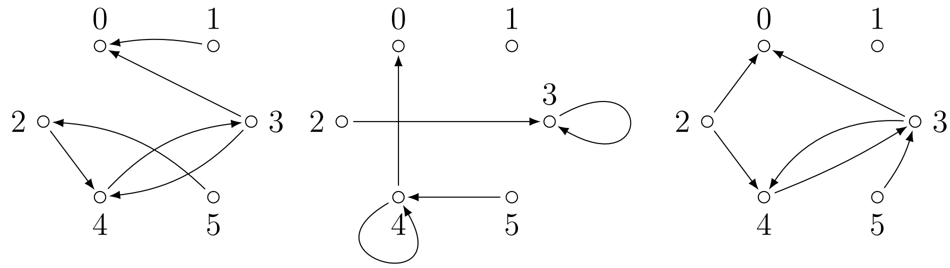
Er geldt dat $(B \setminus A^c)^c \cap A = (\,(B \setminus A^c)^c \cap A\,) \setminus A^c$, want A^c ligt geheel buiten het gearceerde gebied.

Dit is ook gelijk aan $A \setminus B$.

c. Systematisch de axioma's toepassen; één axioma per keer. Per regel staat het axioma genoemd dat wordt toegepast om de uitdrukking op de volgende regel te krijgen. Een mogelijke afleiding is dan:

$((B \cap (A^c)^c)^c \cap A) \cap (A^c)^c =$ 2x dubbel complement
$((B \cap A)^c \cap A) \cap A =$ associativiteit
$(B \cap A)^c \cap (A \cap A) =$ idempotentie
$(B \cap A)^c \cap A =$ commutativiteit
$A \cap (B \cap A)^c =$ de Morgan
$A \cap (B^c \cup A^c) =$ distributiviteit
$(A \cap B^c) \cup (A \cap A^c) =$ complement
$(A \cap B^c) \cup \emptyset =$ nulelement
$A \cap B^c$ QED

2) **a.** Eerst R, daarna R^2 en R^3. Die laatste kunnen gevonden worden door twee resp. drie pijlen achter elkaar te volgen.

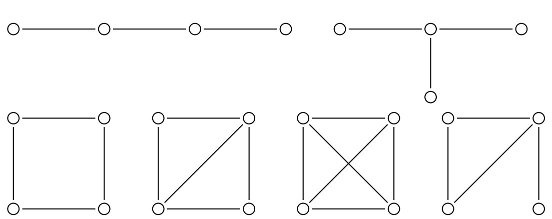


b. Uit **a)**: $R \cup R^2 \cup R^3 = \{(1,0), (3,0), (3,4), (2,4), (4,3), (5,2), (4,0), (3,3), (4,4), (5,4), (2,3), (5,3), (2,0)\}$. Deze verzameling is nog niet transitief, dus we moeten R^4 erbij doen. We krijgen dan als enig nieuw paar nog $(5,0)$. Je ziet dit door $R^4 = R \circ R^3 = R^2 \circ R^2$ als gerichte graaf te tekenen, maar je kunt ook opmerken dat R^k precies alle paren (i,j) bevat waarvoor er in de gerichte graaf behorend bij R een gericht pad is van i naar j ter lengte k. Hier is $k = 4$.
$R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \{(1,0), (3,0), (3,4), (2,4), (4,3), (5,2), (4,0), (3,3), (4,4), (5,4), (2,3), (5,3), (2,0), (5,0)\}$ is transitief, dus dit is de gevraagde transitieve afsluiting.

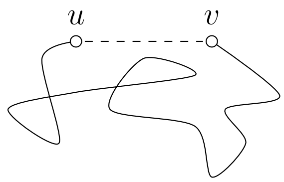
c. S is een *equivalentierelatie*, dus
- $(x,x) \in S$ voor alle $x \in A$ (reflexief)
- als $(x,y) \in S$ dan ook $(y,x) \in S$ (symmetrisch)
- als $(x,y) \in S$ en $(y,z) \in S$ dan $(x,z) \in S$ (transitief)

Dan geldt: (i) $(4,4) \in S$ omdat S reflexief is.
(ii) $(5,2) \in S, (2,4) \in S$, dus vanwege transitiviteit $(5,4) \in S$ en dan vanwege symmetrie ook $(4,5) \in S$.
(iii) Stel dat $(1,3) \in S$, dan volgt uit symmetrie dat ook $(3,1) \in S$. Gegeven is dat $(1,0) \in S$. Uit transitiviteit zou nu volgen dat dan ook $(3,0) \in S$. Dit is in tegenspraak met het gegeven dat $(3,0) \notin S$. Dus kan $(1,3)$ niet in S zitten.
Vaak gezien, maar *foute redenering*: omdat $(1,0) \in S$ zou $(0,3)$ in S moeten zitten om $(1,3)$ via transitiviteit in S te krijgen. Dit is niet goed geconcludeerd, want als $(1,5)$ en $(5,3)$ in S zitten (bijvoorbeeld; dat zou a priori kunnen), is ook $(1,3) \in S$. Het hoeft dus niet via $(1,0)$ en $(0,3)$.

3) **a.**

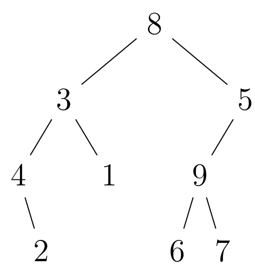


b. We gebruiken in het bewijs alleen de definitie van een boom: een *boom* is een ongerichte graaf die *samenhangend* en *acyclisch* (= zonder cykels) is. Het bewijs gaat uit het ongerijmde.
Stel dat $G - \{e\}$ wel samenhangend is. Dan is er dus een pad in $G - \{e\}$ tussen elk tweetal knopen, in het bijzonder tussen u en v.



Voeg nu de lijn $\{u, v\}$ weer toe. Dan zien we dat G een gesloten pad (en dus een cykel) heeft, namelijk bestaande uit het pad van v naar u en de lijn $\{u, v\}$. Tegenspraak met het feit dat G acyclisch is.

c. De uiteindelijke boom:



Toelichting: postorde is LRW, dus 8 is de wortel van de boom. Zoek nu 8 op in de symmetrische ordening (WLR). Dan zien we dat de linkersubboom van 8 de knopen $\{1, 2, 3, 4\}$ bevat en de rechtersubboom $\{5, 6, 7, 8\}$, en dat de LWR-volgorde van de knopen in de linkersubboom $4, 2, 3, 1$ is, en van de rechtersubboom $6, 9, 7, 5$. Uit de postorde-ordening (LRW) halen we vervolgens dat de LRW-volgorde van de knopen uit de linkersubboom $2, 4, 1, 3$ is, en die van de rechtersubboom $6, 7, 9, 5$. Doorgaand op dezelfde wijze als hiervoor kunnen we nu uit de LWR-volgorde en de LRW-volgorde de linker- en de rechtersubboom reconstrueren. Bijvoorbeeld voor rechts: wortel is 5 (uit LRW); uit LWR zien we dat 5 geen rechterkind heeft, dus er is alleen een linkersubboom. LWR voor die subboom is $6, 9, 7$; LRW is $6, 7, 9$. Wortel is dus 9 (uit LRW), de linkersubboom van 9 bevat 6 en de rechtersubboom bevat 7. De linkersubboom van 8 gaat analoog.

4) De rij a_n wordt inductief gedefinieerd door $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ en $a_n = 6 \cdot a_{n-1} - 8 \cdot a_{n-2}$ voor alle natuurlijke getallen $n \geq 2$.

a. $a_0 = 2$ en $a_1 = 5$, dus $a_2 = 6 \cdot a_1 - 8 \cdot a_0 = 30 - 16 = 14$. En dan $a_3 = 6 \cdot a_2 - 8 \cdot a_1 = 6 \cdot 14 - 8 \cdot 5 = 84 - 40 = 44$.

b. - *Basis:* controleren of de formule klopt voor $n = 0$ <u>en</u> $n = 1$.
Invullen in de te bewijzen formule: $a_0 = 3 \cdot 2^{-1} + 2 \cdot 4^{-1} = \frac{3}{2} + \frac{2}{4} = 2$, en dat klopt. $a_1 = 3 \cdot 2^0 + 2 \cdot 4^0 = 3 + 2 = 5$, en dat klopt ook.

Nu moeten we bewijzen dat de formule ook geldt voor alle andere waarden van n. We nemen daartoe aan dat de formule geldt voor $n - 1$ en voor n, en laten dan zien dat de formule in dat geval ook geldt voor de volgende waarde, namelijk voor $n + 1$. We moeten dus laten zien dat $a_{n+1} = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 4^n$

- *Inductiehypothese:* we veronderstellen dat $a_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-2} + 2 \cdot 4^{n-2}$ en $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 4^{n-1}$

Bewijs: $a_{n+1} =$ (recurrente betrekking)
$6 \cdot a_n - 8 \cdot a_{n-1} =$ (inductiehypothese)
$6 \cdot (3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 4^{n-1}) - 8 \cdot (3 \cdot 2^{n-2} + 2 \cdot 4^{n-2}) =$
(uitschrijven en 2-machten resp. 4-machten bij elkaar nemen)
$(18 \cdot 2^{n-1} - 24 \cdot 2^{n-2}) + (12 \cdot 4^{n-1} - 16 \cdot 4^{n-2}) =$ (machten gelijkmaken)
$(9 \cdot 2^n - 6 \cdot 2^n) + (3 \cdot 4^n - 1 \cdot 4^n) =$ (afmaken)
$3 \cdot 2^n + 2 \cdot 4^n$. QED

5) **a.** Een verzameling A heet aftelbaar als A eindig is of als er een bijectie is tussen $\mathbb{N}$ en A. Alternatief: A heet aftelbaar als er een surjectie is van $\mathbb{N}$ naar A

b. We kunnen $\mathbb{Z}$ als volgt aftellen (bijectie):

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\mathbb{Z}$	0	−1	1	−2	2	−3	3	−4	4	...

Eventueel in formulevorm: bijectie $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, met

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{als } n \text{ even} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$$

c. $\mathbb{Z}$ is aftelbaar en kunnen we opsommen/aftellen als bij **a)** aangegeven. Dan kunnen we $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{\ (x, y) \mid\ x \in \mathbb{Z} \text{ en } y \in \mathbb{Z}\ \}$ weergeven via onderstaande 'tabel':

	0	−1	1	−2	−2	...
0	$(0,0)$	$(0,-1)$	$(0,1)$	$(0,-2)$	$(0,2)$	...
−1	$(-1,0)$	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,-2)$	$(-1,2)$	...
1	$(1,0)$	$(1,-1)$	$(1,1)$	$(1,-2)$	$(1,2)$	...
−2	$(-2,0)$	$(-2,-1)$	$(-2,1)$	$(-2,-2)$	$(-2,2)$	...
2	$(2,0)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(2,-2)$	$(2,2)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

We krijgen een aftelling van $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ door een Cantorwandeling te maken, dat wil zeggen door via de diagonalen te lopen. Zo krijgen we achtereenvolgens: $(0,0), (0,-1), (-1,0), (0,1), (-1,-1), (1,0), (0,-2), (-1,1), (1,-1), (-2,0),$ $(0,2), (-1,-2), \ldots$.

6) **a.** We berekenen x^2, x^3 en x^4 modulo 8 voor $x = 1, 2, \ldots, 7$.

x	1	2	3	4	5	6	7
x^2	1	4	1	0	1	4	1
x^3	1	0	3	0	5	0	7
x^4	1	0	1	0	1	0	1

Bij het berekening gebruiken we natuurlijk (bijvoorbeeld) dat $x^3 = x \cdot x^2 \equiv x \cdot (x^2 \text{ modulo } 8)$, dus dat 7^3 modulo $8 \equiv 7 \cdot 1 \equiv 7$ modulo 8. Vooral NIET eerst 7^3 uitrekenen en dat modulo 8 doen. Kortom ... handig rekenen met modulo!

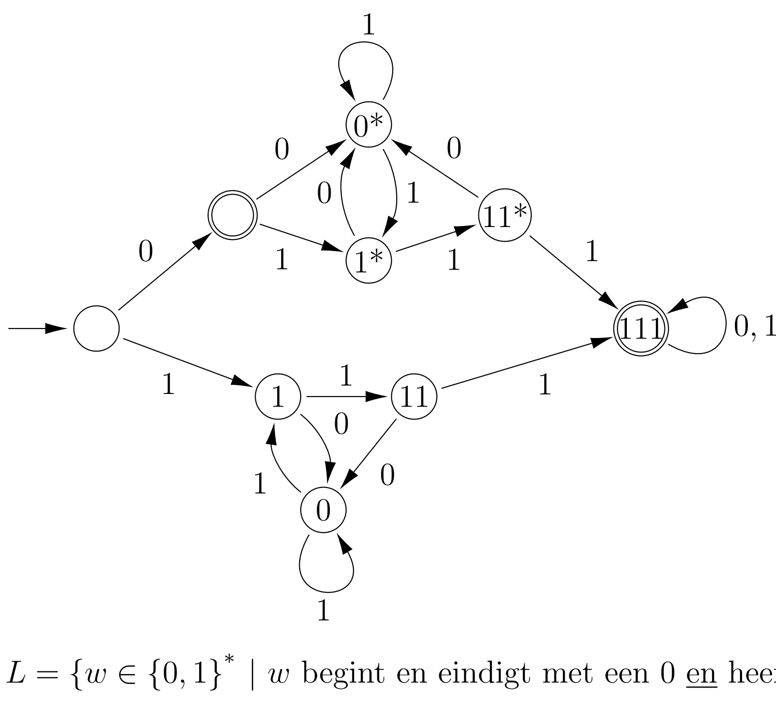
b. Uit **a)**: als x oneven is dan is $x \equiv 1, 3, 5$ of 7 modulo 8, en dan is $x^2 \equiv 1$ modulo 8. Voor die x-en geldt dan: $x^4 = x^2 \cdot x^2 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1$ modulo 8, dus $x^6 = x^2 \cdot x^4 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1$ modulo 8, dus $x^8 = x^2 \cdot x^6 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1$ modulo 8, etcetera.
We zien zo dat $x^m \equiv 1$ modulo 8 als m *even* is. Je kunt dit netjes met inductie bewijzen, maar dat hoeft hier niet.
Ander bewijs: $m > 0$ is even, dus $m = 2k$ voor een natuurlijk getal k. Dan is $x^m = x^{2k} = (x^2)^k \equiv 1^k \equiv 1$ modulo 8 voor oneven x.

c. Merk op dat voor *even* x geldt dat $x^n \equiv 0$ modulo 8 voor elke $n \geq 3$. Dit komt omdat even getallen deelbaar zijn door 2, dus kwadraten van even getallen door 4, derdemachten door 8 en dus hogere machten zeker ook door 8. Het is eveneens uit de tabel af te leiden, want een even getal is modulo 8 alleen gelijk aan $0, 2, 4$ of 6 en derhalve: $x^3 \equiv 0$ modulo 8, dus $x^n = x^3 \cdot x^{n-3} \equiv 0 \cdot x^{n-3} \equiv 0$ modulo 8 voor $n \geq 3$.
We hebben dus meteen: $100^{331} \equiv 0$ modulo 8. Verder: $75^{999} = 75^{998} \cdot 75 \equiv 1 \cdot 75 \equiv 75 \equiv 3$ modulo 8, waarbij we **b)** hebben gebruikt. Verder $43^3 \equiv 3^3 \equiv 3$ modulo 8 (dat laatste komt rechtstreeks uit de tabel).
Alles bij elkaar: $100^{331} + 75^{999} + 43^3 \equiv 0 + 3 + 3 \equiv 6$ modulo 8, dus de rest bij deling door 8 is 6.

7) **a.** In woorden: K = alle woorden die beginnen en eindigen met een 0 (waaronder het woord 0) $\cup$ alle woorden die 111 bevatten.
Als reguliere taal:

$$K = \{0\} \cdot \{0,1\}^* \cdot \{0\} \cup \{0,1\}^* \cdot \{111\} \cdot \{0,1\}^* \cup \{0\}$$

b.



c. $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ begint en eindigt met een 0 <u>en</u> heeft oneven lengte $\geq 3\}$