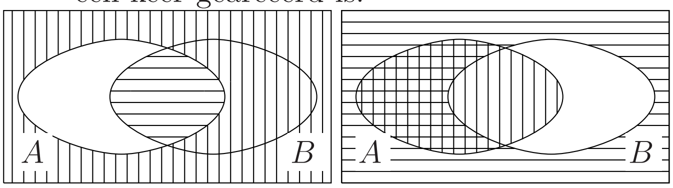
1) "als w even lengte dan w begint met 1", dus w heeft of een even lengte en moet dan tegelijk met een 1 beginnen óf w heeft geen even lengte.

Dus voor $T = \{w \mid w \in L \text{ dan } w \in K\}$ kunnen we schrijven $T = (L \cap K) \cup L^c = K \cap L^c$.

2) Links. Arceer $A \cap B$ horizontaal, en A^c vertikaal. We zijn geïnteresseerd in de vereniging, dus alles wat gearceerd is.

Rechts. Arceer A horizontaal en B^c vertikaal. De doorsnede is alles wat dubbel gearceerd is. We zijn geïnteresseerd in het complement daarvan, dus alles ten hoogste één keer gearceerd is.



De bedoelde gedeeltes zijn gelijk, dus de gelijkheid geldt.

3) Twee feiten:

(i) Voor elk verzameling A geldt $\varnothing \subseteq A$.

(ii) Per definitie $X \in \mathcal{P}(V)$ desdals $X \subseteq V$.

(b) Uit (i) volgt onmiddelijk dat $\varnothing \subseteq \mathcal{P}(V)$ altijd geldt omdat $\mathcal{P}(V)$ een verzameling is.

(a) Er volgt ook uit dat $\varnothing \in \mathcal{P}(V)$ want volgens (ii) geldt dit als $\varnothing \subseteq V$, en dat is waar (i).

(c) Er geldt dat $X \subseteq Y$ als alle elementen van X ook element van Y zijn. In het geval van $\{\varnothing\} \subseteq \mathcal{P}(V)$ staat links een verzameling met één element, en moeten we testen of $\varnothing \in \mathcal{P}(V)$. Dat geldt altijd, zie hierboven (a).

(d) Volgens definitie (ii) geldt $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(V)$ als $\{\varnothing\} \subseteq V$, dus als element $\varnothing$ van $\{\varnothing\}$ ook een element is van V.

Dat geldt soms. Als bijvoorbeel $V = \{1, 2, 3\}$ of als $V = \varnothing$ dan natuurlijk $\varnothing \notin V$, maar als $V = \{\varnothing\}$ dan natuurlijk $\varnothing \in V$.

4) Gegeven is als lemma dat $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ voor elk tweetal (eindige) verzamelingen A en B.

Pas dit toe op de twee verzamelingen A en $B \cup C$ en we krijgen dus $|A \cup (B \cup C)| = |A| + \underbrace{|B \cup C|}_{\text{(a)}} - \underbrace{|A \cap (B \cup C)|}_{\text{(b)}}$.

(a) Hierin mogen we $|B \cup C|$ volgens hetzelfde lemma vervangen door $|B| + |C| - |B \cap C|$.

(b) Er geldt dat $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, wegens distributiviteit. We kunnen het lemma toepassen met verzamelingen $A \cap B$ en $A \cap C$.

En dus $|A \cap (B \cup C)| = |(A \cap B) \cup (A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|$.

Tenslotte is natuurlijk $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$.

Nu alles aan elkaar rijgen:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + \underbrace{|B| + |C| - |B \cap C|}_{\text{(a)}}$$
$$- \underbrace{|A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|}_{\text{(b)}}$$

(opgave uit de bundel)

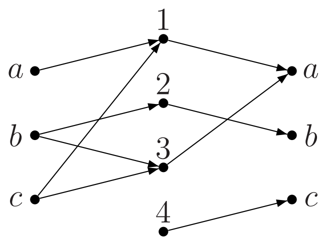
5) Relatie C is reflexief: voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat xCx, omdat $|x - x| = 0 < 1$.

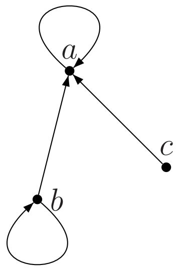
Relatie C is symmetrisch: als xCy dan yCx voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, immers, als $|x - y| < 1$ dan ook $|y - x| < 1$ omdat $|x - y| = |y - x|$.

Relatie C is *niet* transitief: er zijn $x, y, z \in \mathbb{R}$ waarbij zowel xCy als yCz maar niet xCz. Neem bijvoorbeeld $x = 0$, $y = \frac{3}{4}$ en $z = \frac{3}{2}$.

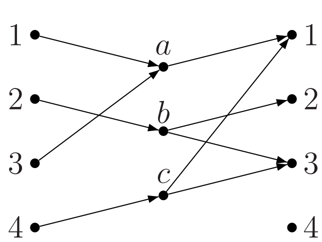
Let op de absoluut-strepen, een afstand is nooit negatief.

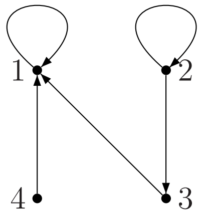
6) Van een schemaatje maken we een gerichte graaf. Voor $R \circ S$, “eerst R dan S”:



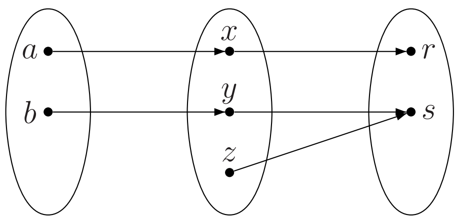


Voor $S \circ R$, “eerst S dan R”:





7) Een mogelijkheid is:

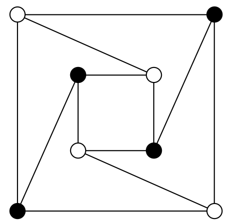


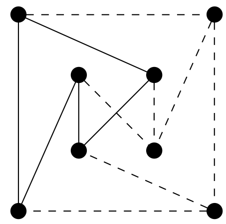
Let op dat f en g functies moeten zijn. In een pijldiagram vertrekt dan precies één pijl in elk element. In een pijldiagram van een injectieve functie komt in elk element maximaal één pijl aan.

Er wordt gevraagd om te zorgen dat tenminste een van f en g zelf niet injectief is, terwijl $g \circ f$ dat wel is. Dan moet f wel injectief zijn: als namelijk $f(a) = f(b)$ dan ook $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(b)) = (g \circ f)(b)$.

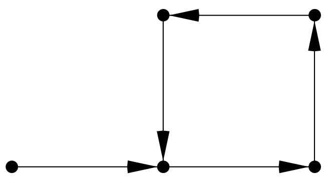
8) Probeer de graaf te kleuren door om-en-om een andere kleur te gebruiken, zonder dat de uiteinden van een lijn dezelfde kleur krijgen. Als dat lukt zien we dat de graaf bipartiet is. Als het niet lukt vinden we een oneven cykel. Deze bewijst dat de graaf niet bipartiet is, want bipartiete grafen hebben alleen cykels met even lengte.

De linker graaf is bipartiet. Rechts vinden we een oneven cykel.





9) Bijvoorbeeld:



Opm. Ik lees wel eens “bij een sterk samenhangende graaf gaat het niet want die hebben geen bron”. Daar staat nauwelijks meer dan in de opgave.

10) Werk iteratief, dus van klein naar groot. De waarde voor $f(n)$ is steeds de som van de voorgaande $f(0), f(1), \ldots, f(n-1)$.

Bijvoorbeeld $f(1) = f(0) = 1$, $f(2) = f(0) + f(1) = 1 + 1 = 2$, $f(3) = f(0) + f(1) + f(2) = 1 + 1 + 2 = 4$, etc.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(n)$	1	2	4	8	16	32	64	128

Het is al snel duidelijk dat de waardes verdubbelen, want $f(6) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$, terwijl $f(7) = \underbrace{f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)}_{=f(6)} + f(6)$.

We vermoeden daarom $f(n) = 2^{n-1}$ voor $n \geq 1$.

HJH&JMdG nov ’16