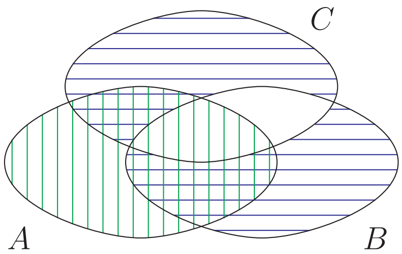
1a. ZIE *jan 2009.*

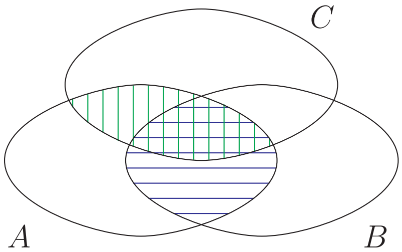
$\{3,5,7,8,11,12\}$, de elementen die in een oneven aantal verzamelingen voorkomen. Herhaald de operatie $\oplus$ toepassen; omdat $\oplus$ associatief is, maakt het niet uit hoe we deze expressie uitrekenen: haakjes zijn overbodig.

$\{3,4,5,6\} \oplus \{4,5,6,7,8\} = \{3,7,8\}$, $\{3,7,8\} \oplus \{5,6,7,8,9,10\} = \{3,5,6,9,10\}$, en tenslotte $\{3,5,6,9,10\} \oplus \{6,7,8,9,10,11,12\} = \{3,5,7,8,11,12\}$.

b. *Venndiagram.* Arceer A vertikaal, en $B \oplus C$ horizontaal. $A \cap (B \oplus C)$ is het gedeelte dat dubbel is gearceerd.



Arceer $A \cap B$ horizontaal, $A \cap C$ vertikaal. Dan is $(A \cap B) \oplus (A \cap C)$ het gedeelte dat precies één arcering heeft.

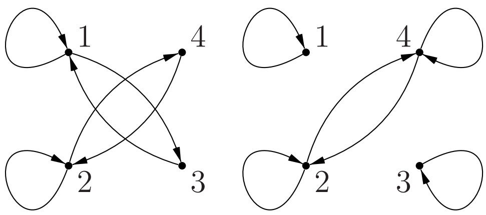


De gebieden corresponderend met de uitdrukkingen komen overeen. De gelijkheid geldt dus.

c. Neem $A = \{1\}$ en $B = C = \varnothing$.
Dan is $A \cup (B \oplus C) = \{1\} \cup \varnothing = \{1\}$, terwijl $(A \cup B) \oplus (A \cup C) = \{1\} \oplus \{1\} = \varnothing$. De uitdrukkingen zijn dus niet aan elkaar gelijk.
Alternatief. Kies $A = B = C$. Dan (links) $A \cup (A \oplus A) = A \cup \varnothing = A$ en (rechts) $(A \cup A) \oplus (A \cup A) = A \oplus A = \varnothing$. Deze zijn ongelijk als $A \neq \varnothing$. Kies nu een willekeurige niet-lege $A = B = C$.

Misverstanden. Een tegenvoorbeeld is een concreet rijtje verzamelingen A, B, C. Dus geen Venn-diagram. Het is wel zo dat als twee Venn-diagrammen verschillen er een tegenvoorbeeld mee gemaakt kan worden: plaats een element in een gebied dat in beide diagrammen verschilt.

2a. Twee stappen, resp. heen-en-weer.



b. De relatie R^2 verbindt alleen 1 en 3 met elkaar, en 2 en 4. Er zijn dus geen pijlen tussen een even en een oneven knoop. Dat geldt dan voor alle even machten van R: er zijn alleen paden van even lengte in de graaf van R van 1 naar 1, dus $(1,1) \notin R^{101}$ terwijl duidelijk $(1,1) \in R^{100}$.

Misverstanden. Het is niet 'vanzelfsprekend' dat $R^{100} \neq R^{101}$. Voor de relatie $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1),(1,3)\}$ geldt $R^{100} = R^{101} = \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$.

c. Helemaal formeel kan het als volgt: $(x,y) \in R \circ R^{-1}$ desdals er een z bestaat met $(x,z) \in R$ en $(z,y) \in R^{-1}$ desdals er een z bestaat met $(x,z) \in R$ en $(y,z) \in R$.

Neem nu $x = y$. Er geldt $(x,x) \in R \circ R^{-1}$ [x 'heeft een loop'] desdals er een z bestaat met $(x,z) \in R$ [x heeft een uitgaande pijl].

Als dit voor alle x moet gelden staat er $\mathrm{id}_A \subseteq R \circ R^{-1}$ desdals R totaal.

3. Zie *dec 2015.* ctrl-c, ctrl-v.

Basis. $a_0 = 1 = 2^0$, en $a_1 = 2 = 2^1$. Hier kloppen de opgegeven waardes met de formule.

Inductiestap. Inductiehypothese: Neem aan de formule $a_k = 2^k$ klopt voor alle $k \leq n$. We controleren de formule voor $n + 1$. We beginnen met het invullen van de definitie: $a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2 \cdot a_{n-1} = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^{n-1} = (3 - 1)2^n = 2^{n+1}$. Klopt.

4a. De relatie $R \subseteq A \times A$ heet reflexief als xRx voor alle $x \in A$; *anti*symmetrisch als uit xRy en yRx volgt dat $x = y$ (voor alle $x, y \in A$); transitief als uit xRy en yRz volgt dat xRz (voor alle $x, y, z \in A$);

b. Zie *jan 2011.*

Wel reflexief: voor elk interval geldt $[a, b] \lhd [a, b]$, want $[a, b] \cup [a, b] = [a, b]$.
Wel antisymmetrisch: als $[a, b] \lhd [c, d]$ dan $a \leq c$ en $b \leq d$. Als ook $[c, d] \lhd [a, b]$ dan $c \leq a$ en $d \leq b$. Indien beide gelden moet dus $a = c$ en $b = d$, dus de intervallen $[a, b]$ en $[c, d]$ zijn gelijk.
Niet transitief: er geldt $[1, 2] \lhd [2, 3]$ en $[2, 3] \lhd [3, 4]$ maar niet $[1, 2] \lhd [3, 4]$ want $[1, 2] \cup [3, 4] \neq [1, 4]$ want er mist een stukje, de intervallen sluiten niet aan.

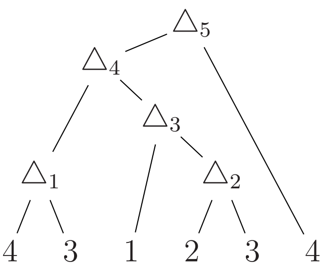
Misverstanden. De elementen x, y, z waarvoor de eigenschappen getest moeten worden zijn intervallen.

c. Bijvoorbeeld: interval $[a, b]$ ligt binnen interval $[c, d]$, dus als geldt $c \leq a \leq d \leq b$.

Er zijn ook vrij simpele mogelijkheden, zoals 'begint eerder dan': $[a, b] \leq [c, d]$ desdals $a < c$ of als $[a, b] = [c, d]$ (het eerste geeft direct antisymmetrie en transitiviteit, het laatste is nodig voor reflexiviteit).

5a. Schrijf de knopen van links naar rechts, en verbindt een interne knoop met de laatste twee knopen zonder ouder; nummertjes voor de duidelijkheid:

4 3 $\triangle_1$ 1 2 3 $\triangle_2$ $\triangle_3$ $\triangle_4$ 4 $\triangle_5$



Preorde: $\triangle_5$ $\triangle_4$ $\triangle_1$ 4 3 $\triangle_3$ 1$\triangle_2$ 2 3 4

b. Zie *Opgave 47 bundel.*

f(blad) = 1; f(knoop) = f(links) + f(rechts).

6a. Zie *mrt 2014.*

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1
x^3	0	1	3	2	4
x^4	0	1	1	1	1

Misverstanden. Het is niet de bedoeling om 4^4 echt uit te rekenen als je deze tabel maakt. Dat kan met modulo rekenen veel eenvoudiger!

b. Voor $x = 0$ mod 5 geldt natuurlijk dat $x^{23} + x^{17} + 2 = 2$ mod 5, en dus geldt dat $x^{23} + x^{17} + 2$ *niet* deelbaar is door 5 als x een vijfvoud is.

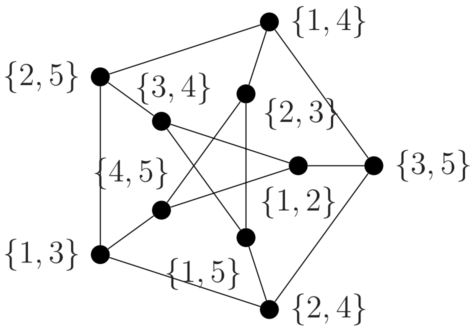
Voor elke andere waarde geldt dat $x^4 = 1$ mod 5, zie de tabel, dus mogen we bij de exponenten viertallen wegschrappen. $x^{23} + x^{17} = x^3 + x^1$ mod 5. Volgens de tabel hierboven is $x^3 + x$ gelijk aan respectievelijk 2, 0, 0, 3 (modulo 5) voor 1,2,3,4. Dat betekent dat $x^{23} + x^{17} + 2$ een vijfvoud is precies als x rest 4 heeft bij deling door 5.

Misverstanden. De exponent mogen we niet modulo 5 nemen (bij getallen modulo 5).

7a. De $\mathrm{KG}_{n,1}$ heeft knopen corresponderend met verzamelingen met één element, $\{i\}$ met $1 \leq i \leq n$. Omdat $\{i\} \cap \{j\} = \varnothing$ voor $i \neq j$ is elk paar verbonden. Dus krijgen we een complete graaf, met n knopen en $\binom{n}{2}$ lijnen, het aantal manieren om twee knopen uit n te kiezen. (Dat is gelijk aan $\frac{n(n-1)}{2}$: er zijn n manieren om de eerste knoop te kiezen, maal $n-1$ manieren voor de tweede knoop. Deel door 2 omdat de lijnen symmetrisch zijn.)

b. Zie *feb 2011, mrt 2012*, zonder uitwerkingen helaas.

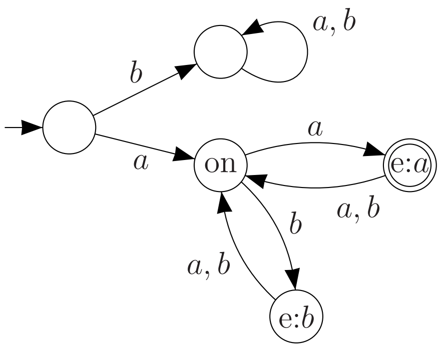
Kies alle $\binom{5}{2} = 10$ verzamelingen van twee elementen uit $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ als knopen. Aangezien het volgende onderdeel zegt dat we de Petersen graaf krijgen gebruiken we dat in de tekening. Als we beginnen met de 'vijfster' $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots \{5, 1\}$ kunnen de overige knopen er makkelijk bijgeplaatst. (Bijvoorbeeld: $\{1, 2\}$ heeft drie buren, de tweetallen uit $\{3, 4, 5\}$. Daarvan hebben we er al twee in de binnenste ster.)



c. Het isomorfisme is een bijectie tussen de knopen van de Petersen-graaf van de opgave met die uit de zojuist getekende Kneser graaf $\mathrm{KG}_{5,2}$ zodat de lijnen behouden blijven. Aangezien we de plaatjes denkbeeldig over elkaar kunnen leggen, krijgen we $0 \leftrightarrow \{3, 5\}$, $1 \leftrightarrow \{1, 4\}$, $\ldots$, $9 \leftrightarrow \{1, 5\}$.

Misverstanden. Wanneer twee grafen evenveel knopen en evenveel lijnen hebben, en alle knopen van gelijke graad zijn, zijn ze nog niet isomorf! Zie een voorbeeld in de slides.

8a. Belangrijk: de eerste letter a, de laatste letter a, de even/oneven lengte.



Misverstanden. Eindige automaten hebben graag een label met een letter op de pijlen. Het speciale pijltje om de begintoestand aan te geven heeft geen label.

b. $\{a\} \cdot \{aa, ab, ba, bb\}^* \cdot \{a\}$ of zo je wilt $\{a\} \cdot (\{a, b\} \cdot \{a, b\})^* \cdot \{a\}$.

Sommige mensen prefereren een andere notatie voor reguliere expressies, in het laatste geval krijgen we dan: $a(\,(a + b)^2\,)^* a$.

HCMK&HJH mar '16