1a. Zie *jan 2011.*

$$\begin{aligned}(A \cup B^c) \cup (B \cap A^c) &= \text{distribut}\\ ((A \cup B^c) \cup B) \cap ((A \cup B^c) \cup A^c) &= \text{commutat}\\ ((A \cup B^c) \cup B) \cap ((B^c \cup A) \cup A^c) &= \text{associat}\\ (A \cup (B^c \cup B)) \cap (B^c \cup (A \cup A^c)) &= \text{complem}\\ (A \cup U) \cap (B^c \cup U) &= \text{één-elem}\\ U \cap U &= \text{idempoten}\\ U\end{aligned}$$

Er is ook een alternatief.

$$\begin{aligned}(A \cup B^c) \cup (B \cap A^c) &= \text{dubb compl}\\ (A \cup B^c) \cup ((B \cap A^c)^c)^c &= \text{de Morgan}\\ (A \cup B^c) \cup (B^c \cup A^{cc})^c &= \text{dubb compl}\\ (A \cup B^c) \cup (B^c \cup A)^c &= \text{commutatief}\\ (A \cup B^c) \cup (A \cup B^c)^c &= \text{complement}\\ U\end{aligned}$$

b. $|V \cup W| = |V| + |W| - |V \cap W|$, waarbij $|X|$ het aantal elementen van de (eindige) verzameling X weergeeft; soms wordt hier ook $n(X)$ gebruikt.

c. Getallen deelbaar door 6 zijn ook deelbaar door 2 (en door 3) en tellen dus al mee als we alleen kijken naar de aantallen getallen deelbaar door 2 of door 3. Pas nu onderdeel **b.** toe.

$|V| = 3000$, $|W| = 2000$, $|V \cap W| = 1000$, antwoord 4000.

2a. Een verzameling heet aftelbaar als zij ofwel eindig is ofwel gelijkmachtig met $\mathbb{N}$.

b. Het verschil zit natuurlijk in de twee gevallen van de definitie van aftelbaarheid.

Voor elke eindige V geldt dat $\mathcal{P}(V)$ weer eindig en dus aftelbaar is: $|\mathcal{P}(V)| = 2^{|V|}$.

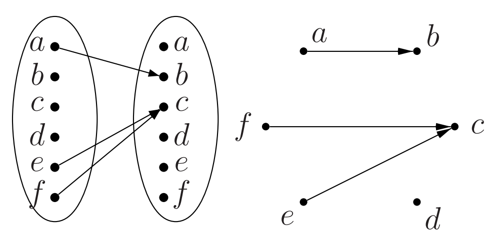
Voor elke oneindig aftelbare V is $\mathcal{P}(V)$ niet aftelbaar. Er geldt dat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ niet gelijkmachtig met $\mathbb{N}$ en dus niet aftelbaar is

c. Laat $\mathcal{N}_k$ de verzameling van deelverzamelingen met drie elementen van $\{0, 1, \ldots k\}$ zijn. Dan is $\mathcal{N}_k$ eindig (er zijn precies $\binom{k+1}{3}$ elementen), en er geldt $\mathcal{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_k$. Nu is $\mathcal{N}$ een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen, en daarmee zelf aftelbaar.

Je kunt ook een natuurlijke aftelling beschrijven, zoals $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 4\}, \ldots$ $\{2, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}, \ldots$

3a. $R \subseteq A \times A$ is reflexief als xRx voor alle $x \in A$, symmetrisch als xRy dan ook yRx (voor alle $x, y \in A$) en transitief als xRy en yRz dan xRz (voor alle $x, y, z \in A$).

b.



Er geldt aRb, eRC en fRc maar *niet* dRb.

Vanwege symmetrie geldt cRf en dan vanwege transitiviteit eRf, als gevraagd.

Stel dat dad, dan ook dRa (symmetrie). Vanwege aRb tenslotte dRb (transitief). Dit is in tegenspraak met het gegeven, dus *niet* $aR3$.

c. Altijd bij elkaar in de klasse a en b, en ook c, e en f, maar *niet* b en d. Er zijn meerdere relaties die voldoen. De mogelijke klassen zijn:

$\{a, b\}$, $\{c, e, f\}$, en $\{d\}$.

$\{a, b, c, e, f\}$, en $\{d\}$.

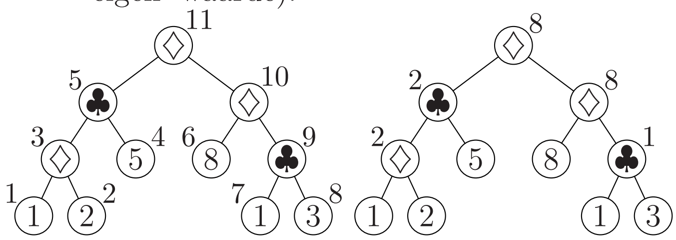
$\{a, b\}$, en $\{c, d, e, f\}$.

4. *Basis.* $a_0 = 1 = 2^0$, en $a_1 = 2 = 2^1$. Hier kloppen de opgegeven waardes met de formule.

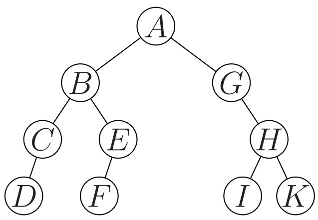
Inductiestap. Inductiehupothese: Neem aan de formule $a_k = 2^k$ klopt voor alle

$k \leq n$. We controleren de formule voor $n+1$. We beginnen met het invullen van de definitie: $a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2 \cdot a_{n-1} = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^{n-1} = (3-1)2^n = 2^{n+1}$. Klopt.

5ab. Boom met ook postordenummering (links) en evaluatie (rechts, bladeren hebben hun 'eigen' waarde).



c. De wortel is de eerste knoop in preorde, dus A. Uit de symmetrische ordening weten we nu de knopen links $(D, C, \underline{B}, F, E)$ en rechts $(\underline{G}, I, H, K)$ van A. Hiervan hebben we de wortels onderstreept (deze zijn weer de eerste in preorde). Enzovoorts.



d. Het verschil is dat we in het eerste geval de ariteit van de knopen weten (dat wil zeggen het aantal kinderen). Dat is voor de operaties twee, en voor de operanden nul (de bladeren).

6a.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
x^2	0	1	4	1	0	1	4	1
x^3	0	1	0	3	0	5	0	7
x^4	0	1	0	1	0	1	0	1

nb. Reken modulo. Het is niet de bedoeling om eerst expliciet $7^4 = 2410$ uit te rekenen.

b. $n^4 - 1$ is deelbaar door 8 als $n^4 - 1 \equiv 0 \pmod 8$ oftewel $n^4 \equiv 1 \pmod 8$. Elke oneven n hoort bij een van de restklassen $1, 3, 5, 7$. Volgens de tabel hierboven is x^4 gelijk aan 1 in die kolommen.

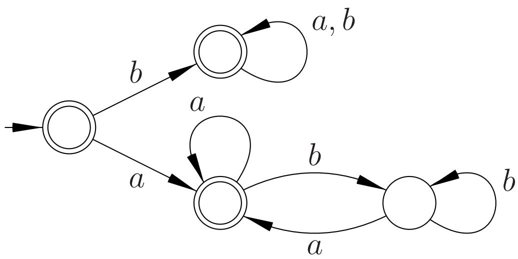
c. $100^{100} \equiv 4^{100} \pmod 8$ omdat $100 \equiv 4 \pmod 8$. Maar alle hogere machten van 4 leveren nul op, omdat reeds $4^2 \equiv 0 \pmod 8$.

$77^{77} \equiv 5^{77} \pmod 8$ omdat $77 \equiv 5 \pmod 8$. Maar alle oneven machten van 5 leveren 5 op, omdat $5^2 \equiv 1 \pmod 8$.

Antwoord $0 + 5 = 5$.

7a. Verboden is de combinatie waarin de laatste letter een b en de eerste letter een a. Dus: ja, ja, nee, ja, ja.

b. De eerste letter is belangrijk. Als die een b is mag de laatste letter alles zijn. Als die een a is moet de laatste letter ook een a zijn.



c. Dat zijn de 'verboden' combinaties: $\{a\} \cdot \{a,b\}^* \cdot \{b\}$ of zo je wilt $a(a+b)^*b$.

HCMK&HJH feb '16