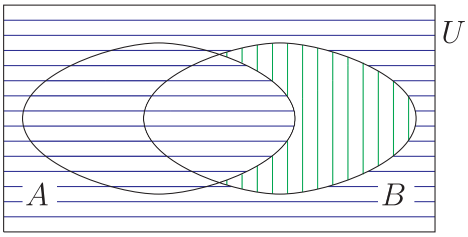
1a. Horizontaal, $A \cup B^c$, alles in A of buiten B. Verticaal, $B \cap A^c$, alles in B wat zich buiten A bevindt. Samen wordt alles gearceerd, dat wil zeggen de vereniging is U.



Opmerking. We ontkomen er in dit diagram niet onder uit om het universum, de omhullende rechthoek, ook te tekenen.

b. *Zie jan 2011 en dec 2006.* Knip, plak.

$$\begin{aligned}
(A \cup B^c) \cup (B \cap A^c) &= && \text{distribut}\\
((A \cup B^c) \cup B) \cap ((A \cup B^c) \cup A^c) &= && \text{commutat}\\
((A \cup B^c) \cup B) \cap ((B^c \cup A) \cup A^c) &= && \text{associat}\\
(A \cup (B^c \cup B)) \cap (B^c \cup (A \cup A^c)) &= && \text{complem}\\
(A \cup U) \cap (B^c \cup U) &= && \text{één-elem}\\
U \cap U &= && \text{idempoten}\\
U &
\end{aligned}$$

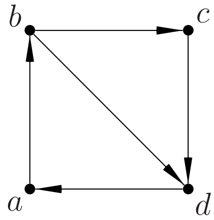
Opmerking. Het is verleidelijk om te denken dat $(A \cup B^c) \cup (B \cap A^c) = [A \cup (B \cap A^c)] \cup [B^c \cup (B \cap A^c)]$ een toepassing van distributiviteit is. Dat klopt niet, de vorm is dan $(A \cup B) \cup X = [A \cup X] \cup [B \cup X]$ met twee keer dezelfde operatie. De bewering is wel waar overigens.

Of, via De Morgan.

$$\begin{aligned}
(A \cup B^c) \cup (B \cap A^c) &= && \text{dubb compl}\\
(A \cup B^c) \cup ((B \cap A^c)^c)^c &= && \text{de Morgan}\\
(A \cup B^c) \cup (B^c \cup A^{cc})^c &= && \text{dubb compl}\\
(A \cup B^c) \cup (B^c \cup A)^c &= && \text{commutatief}\\
(A \cup B^c) \cup (A \cup B^c)^c &= && \text{complement}\\
U &
\end{aligned}$$

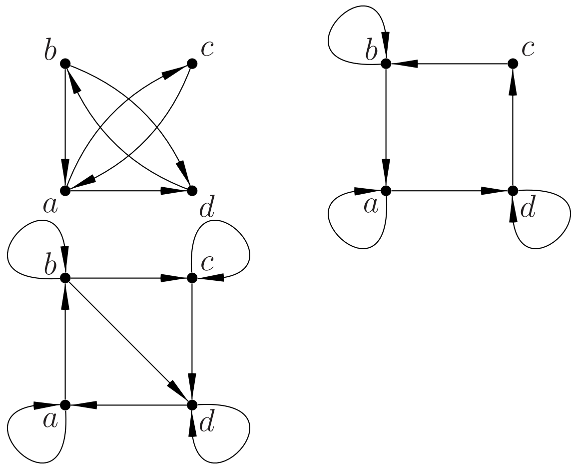
Opmerking. Het is verleidelijk om te denken dat $(B \cap A^c) = (B^c \cup A)^c$ een toepassing van De Morgan is. Dat is wat erg snel door de bocht, zie boven.

3a.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b.



Opmerking. Van pijlen met punten aan beide zijden (om aan te geven dat we twee kanten op kunnen) wordt ik niet blij, want zijn lastig te overzien.

Een gerichte graaf is sterk samenhangend als er van elke knoop naar elke andere knoop een pad is. Al deze grafen voldoen daar aan.

3a. Hier is R een binaire relatie op A, dus $R \subseteq A \times A$.

R heet *reflexief* als xRx voor alle $x \in A$. Technisch: $\mathrm{id}_A \subseteq R$.

R heet *antisymmetrisch* als xRy en yRx impliceren dat $x = y$, voor alle $x, y \in A$. Technisch: $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$.

R heet *transitief* als xRy en yRz impliceren dat xRz, voor alle $x, y, z \in A$. Technisch: $R^2 \subseteq R$.

Opmerking. Intuitie is mooi, maar we verwachten hier een duidelijke omschrijving, geen vage uitleg.

b. *Uitleg.* Een relatie op $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ is een relatie tussen paren getallen, als je wilt tussen punten met gehele coördinaten in het vlak. De x, y, z uit onderdeel **a** zijn élk dus getallenparen.

De relatie is reflexief als $(a,b)\angle(a,b)$ voor alle (a,b): dat klopt omdat $a \leq a$ en $b \leq b$.

De relatie is antisymetrisch als uit $(a,b)\angle(c,d)$ en $(c,d)\angle(a,b)$ volgt dat $(a,b) = (c,d)$. Vul de gegevens in: $a \leq c$ en $d \leq b$, maar ook $c \leq a$ en $b \leq d$. Daarom $a = c$ en $b = d$ en dus $(a,b) = (c,d)$. Klopt.

De relatie is transitief als uit $(a,b)\angle(c,d)$ en $(c,d)\angle(e,f)$ volgt dat $(a,b)\angle(e,f)$. Vul de gegevens in: $a \leq c$ en $d \leq b$, maar ook $c \leq e$ en $f \leq d$. Daarom $c \leq e$ en $f \leq b$. Daarom $(a,b)\angle(e,f)$, klopt.

4a. *Wat weten we?* Als A en B eindige verzamelingen zijn, dan geldt $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ (machtsverzameling) en $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ (cartesisch product).

Het aantal elementen is dus $2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$.

Elk element is een deelverzameling van het cartesisch product $\{a,b,c\} \times \{1,2\}$, en dus een *relatie* tussen $\{a,b,c\}$ en $\{1,2\}$.

b. Een verzameling is aftelbaar als zij eindig is of gelijkmachtig met $\mathbb{N}$, de verzameling van natuurlijke getallen.

c. *Uitleg.* Het standaard plaatje voor deze constructie is een dubbel oneindige $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ matrix van booleans, horizontaal de elementen, verticaal alle 'afgetelde' deelverzamelingen van $\mathbb{N}$. Met de diagonaal construeren we een nieuwe verzameling door alle bits daar om te keren. Zie slides. Hier geef ik een bijbehorend bewijs.

Bewijs door middel van tegenspraak. Neem aan dat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wél aftelbaar is. Dan bestaat er een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, dus er is een lijst $V_k \subseteq \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ die alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ vormen.

Construeer nu $V = \{k \in \mathbb{N} \mid k \notin V_k\}$ (dit is het 'omkeren van de diagonaal'). Er geldt $V \subseteq \mathbb{N}$, maar V is niet gelijk aan V_k (voor alle k), omdat $k \in V$ desdals $k \notin V_k$.

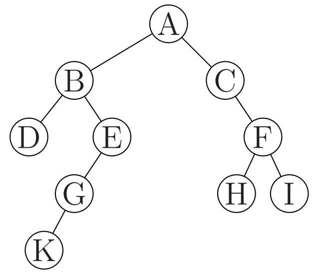
Conclusie: we hebben niet alle deelverzamelingen opgesomd, tegenspraak, $\mathbb{N}$ is niet aftelbaar.

5a. De wortel is de eerste knoop in preorde, dus A. Uit de inorde(=symmetrisch) zien we dat links D, B, K, G, E liggen, want komen voor A, en rechts C, H, F, I. Dit is dan de inorde van de twee deelbomen. De preorde is B, D, E, G, K respectievelijk C, F, H, I.

preorde $\boxed{A}, \underbrace{B, D, E, G, K}, \underbrace{C, F, H, I}$

inorde $\underbrace{D, B, K, G, E}, \boxed{A}, \underbrace{C, H, F, I}$

Dat kunnen we zo doorzetten voor de linker en rechter deelboom.



b. Elke 'lineaire' boom (dus steeds één kind) waarvan de knopen van boven naar beneden A, B, C, D heten hebben preorde A, B, C, D en postorde D, C, B, A. Dat zijn acht mogelijkheden. [Tekening]

6a. $n = 3$: $\sum_{k=0}^{3}(-1)^k k = (-1)^0 \cdot 0 + (-1)^1 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^3 \cdot 3 = 0 - 1 + 2 - 3 = -2 = -\frac{3+1}{2}$, klopt aangezien 3 oneven is.

$n = 4$: $\sum_{k=0}^{4}(-1)^k k = 0 - 1 + 2 - 3 + 4 = 2 = \frac{4}{2}$, klopt aangezien 4 even is.

b. *Wat gaan we doen?* Volgens de aanwijziging moeten we de "even en oneven gevallen apart behandelen". Dat kan op twee manieren. We kunnen de inductie voor beide apart doen, en dan niet van inductieaanname n naar $n+1$ gaan, maar naar $n+2$, het volgende (on)even getal.

We kunnen ook gewoon inductie doen, maar dan elk moment heel precies kijken of de bewering voor oneven dan wel even moet gelden. Dat is belangrijk omdat de formules voor beide gevallen verschillen.

Basis. $n = 0$ (is even). $\sum_{k=0}^{0}(-1)^k k = (-1)^0 0 = 0 = 0/2$, klopt.

Inductiestap. Aanname: er geldt $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even} \\ -(n+1)/2 & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$.

Te bewijzen: $\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k k = \begin{cases} (n+1)/2 & \text{als } n+1 \text{ even} \\ -(n+2)/2 & \text{als } n+1 \text{ oneven} \end{cases}$.

Er geldt (zoals altijd bij sommaties) dat we de laatste term apart kunnen nemen, $\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k + (-1)^{n+1}(n+1)$.

Nu is het een kwestie van invullen (en opletten).

Geval n is even, dus $n+1$ oneven, en $(-1)^{n+1} = -1$.

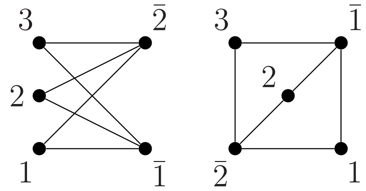
$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k}_{\text{aanname}} + (-1)^{n+1}(n+1) = \tfrac{n}{2} - (n+1) = -\tfrac{n+2}{2},$$
precies zoals gevraagd voor oneven $n+1$.

Op dezelfde manier, geval n is oneven, dus $n+1$ even, en $(-1)^{n+1} = +1$.

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k}_{\text{aanname}} + (-1)^{n+1}(n+1) = -\tfrac{n+1}{2} + (n+1) = \tfrac{n+1}{2},$$
precies zoals gevraagd voor even $n+1$.

7a. Een graaf is bipartiet als de knopen in twee verzamelingen V_1 en V_2 verdeeld kunnen worden zodat elke lijn tussen V_1 en V_2 loopt. (Niet alle lijnen hoeven aanwezig te zijn.)

De $K_{3,2}$ zoals u gewend bent, en zonder kruisende lijnen (dus 'vlak' getekend).

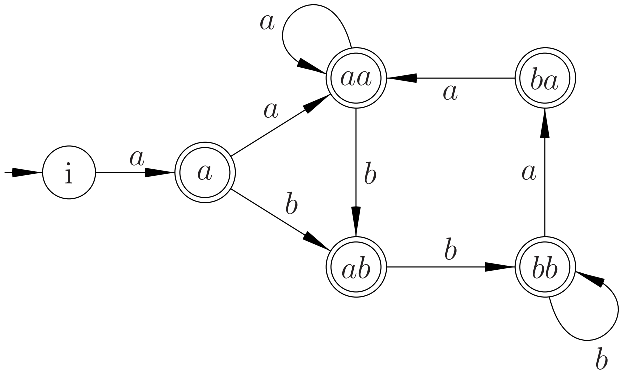


b. Een boom is bipartiet, stop nl. een knoop in V_1, al zijn buren in V_2, al hun buren weer in V_1, enz. *Ook*: Stelling zegt dat een graaf bipartiet is desdals er geen cykels van oneven lengte bestaan. Een boom heeft helemaal geen cykels, dus voldoet.

c. Een graaf is Eulers als deze een Eulerwandeling heeft een gesloten pad die alle knopen precies één keer aandoet (waarbij de eerste en laatste knoop samen als één tellen). *Ook*: Stelling zegt dat de graaf samenhangend moet zijn en elke knoop een even graad.

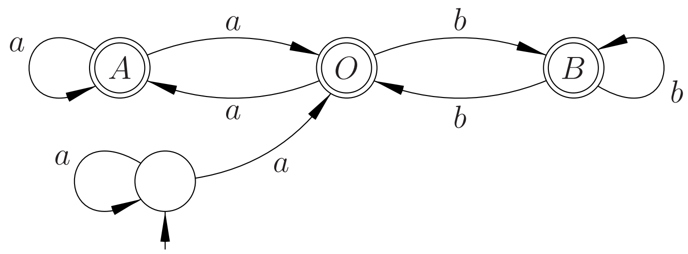
$K_{3,2}$ is bipartiet maar niet Eulers. De cykel C_5 van vijf knopen is Eulers maar niet bipartiet. [Tekening]

8a. De eerste letter is belangrijk, daarna moeten we opletten dat na ab of ba geen a respectievelijk b komt.



Het is mogelijk om toestand a en toestand aa samen te voegen.

Je kunt zien dat na elke a tenminste nog één a moet volgen, en idem voor de b's, afgezien van de eerste a of letters aan het eind. Dat kan ook anders weergegeven, met wat extra niet-determinisme.



b. Het complement bestaat dus uit woorden die niet beginnen met een a of wel een deelwoord aba of bab hebben. Let op, het lege woord begint ook niet met een a.

$\{\lambda\} \cup \{b\} \cdot \{a, b\}^* \cup \{a, b\}^* \cdot \{aba, bab\} \cdot \{a, b\}^*$

In andere notatie:
$\lambda + b(a + b) * +(a + b) * (aba + bab)(a + b)*$