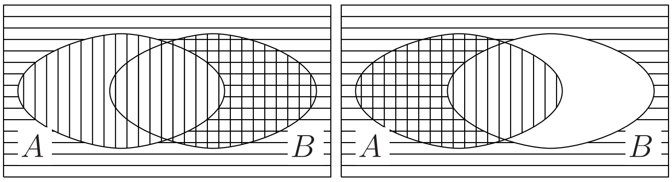


1a. Links: verticaal $A \cup B$, horizontaal A^c. De doorsnede is het gebied dat dubbel gearceerd is. Rechts: verticaal A, horizontaal B^c. De vereniging is gearceerd, het complement daarvan is ongearceerd.

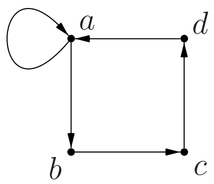
We zijn geinteresseerd in de laatstgenoemde gebieden, die zijn links en rechts gelijk. Namelijk $B \setminus A$, maar dat werd niet gevraagd.

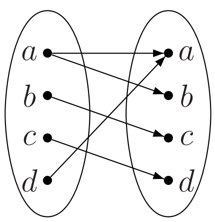
Misverstanden. We werken hier met complementen. Dan moet je altijd het universum (buitenste kader) aangeven.

b. $(\,A \cap U\,)^c = A^c \cup \varnothing$.

Want: $\varnothing \leftrightarrow U$ en $\cup \leftrightarrow \cap$. Dat is alles!

2a.





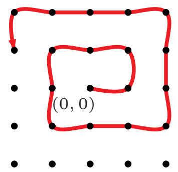
b. De matrix van een ongerichte graaf is symmetrisch in de hoofd-diagonaal. (Bij een simpele graaf eisen we ook dat er geen loops zijn, dus dat er alleen nullen op de diagonaal staan.)

Bij een reflexieve relatie heeft de matrix alleen enen op de diagonaal, een symmetrische relatie heeft een symmetrische matrix (wonder!).

c. Er geldt $R^{100} = \{a, b, c, d\}^2$, oftewel alle mogelijke paren. De matrix voor R^{100} bestaat uit 4×4 enen. We kunnen namelijk vanuit elke x naar a, een geschikt aantal stappen in a blijven vanwege de loop op a, en dan van a naar elke y. Natuurlijk kunnen we dit zo doen dat het in totaal 100 stappen zijn.

3a. Een verzameling A is aftelbaar als zij eindig is, of gelijkmachtig met $\mathbb{N}$. *Ook goed:* als er een surjectieve afbeelding $f : \mathbb{N} \to A$ bestaat.

b. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ is het getallenrooster, paren gehele getallen (x, y). Die elementen kunnen we aftellen, weliswaar niet "langs de diagonalen" maar wel, door vanuit de oorsprong in steeds wijdere spiralen alle elementen af te werken. Dat geeft een bijectie met $\mathbb{N}$: $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1), (-1,1), (-1,0),$ $(-1,-1), (0,-1), (1,-1), (2,-1), (2,0), \ldots$



om te laten zien dat het kán ...

4a. *Wat gaan we doen?* De reeks x_n is recursief gedefinieerd, maar er is ook een gesloten formule voor gegeven. Met inductie gaan we controleren of deze met elkaar overeenkomen. Basis: controleer de eerste twee los gegeven waardes met de formule. Inductie: als tot en met n beide waardes overeenkomen kijk dan of dat voor de $n+1$-ste weer geldt.

Basis. $(n = 0)$ $3^0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$, $(n = 1)$ $3^1 + (-1)^2 = 3 + 1$. Klopt.

Inductie-hypothese. De inductieve reeks voldoet aan de gesloten formule tm. n.

Gebruik de recursieve definitie, en vul de formule in. $x_{n+1} \overset{\text{def}}{=} 2x_n + 3x_{n-1} \overset{\text{hypothese}}{=} 2[\underbrace{3^n + (-1)^{n+1}}_{x_n}] + 3[\underbrace{3^{n-1} + (-1)^n}_{x_{n-1}}] = (2 + 1)3^n + (2-3)(-1)^{n+1} = 3^{n+1} + (-1)^{n+2}$. Perfect: de formule die we verwachten voor x_{n+1}.

b. Je mag de opeenvolgende getallen van de reeks x_n bepalen met de recursie, of met de formule, dat levert hetzelfde op.

n	0	1	2	3
x_n	0	4	8	28
$\sum_{k=0}^{n} x_k$	0	4	12	40

c. Meetkundige reeks! $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$. Voor $r = 3$: $\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.
Voor $r = -1$: $\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} = -\sum_{i=0}^{n} (-1)^i = -\frac{(-1)^{n+1}-1}{-2}$. Dat laatste ziet er gruwelijk uit, maar wat komt er uit de som $\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} = -1+1-1+1-1+\cdots\pm 1$? Dat is natuurlijk -1 als n even, en 0 als n oneven. (*Let op*: als n even, staan er een oneven aantal termen.) Kortom, dat is duidelijker dan de formule.

$\sum_{i=0}^{n} [3^i + (-1)^{i+1}] = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ als n oneven, en $\frac{3^{n+1}-1}{2} - 1 = \frac{3^{n+1}-3}{2}$ als n even.

5a. (jan 2010, jan 2013 met uitgebreide uitleg)

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1
x^3	0	1	3	2	4
x^4	0	1	1	1	1

Misverstanden. Het is niet de bedoeling om 4^4 echt uit te rekenen als je deze tabel maakt. Dat kan met modulo rekenen veel eenvoudiger!

b. Voor $x = 0 \bmod 5$ geldt natuurlijk dat $x^{23} + x^{17} + 2 = 2 \bmod 5$, en dus geldt dat $x^{23} + x^{17} + 2$ *niet* deelbaar is door 5 als x een vijfvoud is.

Voor elke andere waarde geldt dat $x^4 = 1 \bmod 5$, zie de tabel, dus mogen we bij de exponenten viertallen wegschrappen. $x^{23} + x^{17} = x^3 + x^1 \bmod 5$. Volgens de tabel hierboven is $x^3 + x$ gelijk aan respectievelijk 2, 0, 0, 3 (modulo 5) voor 1,2,3,4. Dat betekent dat $x^{23} + x^{17} + 2$ een vijfvoud is precies als x rest 4 heeft bij deling door 5.

Misverstanden. De exponent mogen we niet modulo 5 nemen (bij getallen modulo 5).

6a. De relatie $R \subseteq A \times A$ heet reflexief als xRx voor alle $x \in A$; *anti*symmetrisch als uit xRy en yRx volgt dat $x = y$ (voor alle $x, y \in A$); transitief als uit xRy en yRz volgt dat xRz (voor alle $x, y, z \in A$);

Misverstanden. Wees precies en compact. Gebruik geen vage omschrijvingen.

b. (jan 2011) Wel reflexief: voor elk interval geldt $[a, b] \triangleleft [a, b]$, want $[a, b] \cup [a, b] = [a, b]$.
Wel antisymmetrisch: als $[a, b] \triangleleft [c, d]$ dan $a \le c$ en $b \le d$. Als ook $[c, d] \triangleleft [a, b]$ dan $c \le a$ en $d \le b$. Indien beide gelden moet dus $a = c$ en $b = d$, dus de intervallen $[a, b]$ en $[c, d]$ zijn gelijk.
Niet transitief: er geldt $[1, 2] \triangleleft [2, 3]$ en $[2, 3] \triangleleft [3, 4]$ maar niet $[1, 2] \triangleleft [3, 4]$ want $[1, 2] \cup [3, 4] \ne [1, 4]$ want er mist een stukje, de intervallen sluiten niet aan.

Misverstanden. De elementen waarvoor de eigenschappen getest moeten worden zijn intervallen.

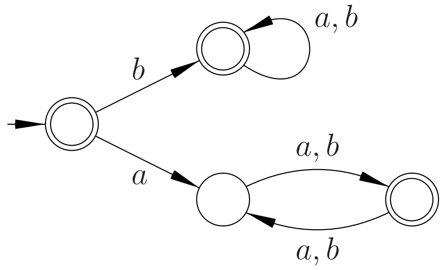
c. Interval $[a, b]$ ligt binnen interval $[c, d]$ als geldt $c \le a \le d \le b$.

7a. Theorem 8.6. Een ongerichte graaf G met n knopen is een boom als aan (tenminste) twee van de volgende eisen is voldaan *(i)* G is samenhangend, *(ii)* G heeft geen cykels, en *(iii)* G heeft $n - 1$ lijnen.

b. Nee, een ongerichte boom heeft nu juist geen wortel. Wortels horen bij gerichte bomen (waarbij de richting dan van wortel naar bladeren loopt).

8a. Een string behoort tot T als deze (i) niet met een a begint, of (ii) wel met een a begint en even lengte heeft. Dat kan zelfs korter $T = K^c \cup L$.

b. $\lambda \in T$. Want begint niet met een a.



c. $b \cdot \{a,b\}^* \cup (\{a,b\}^2)^*$.

Misverstanden. $\{a,b\}$ is een a of een b. Vanwege de komma. $\{a,b\}^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$.

HJH mrt'14