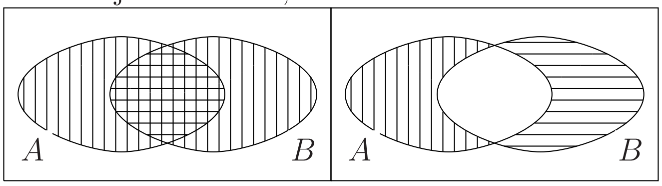
1a. zie januari 2013, en maart 2005. bundel 2b.



Linker plaatje: $A \cup B$ (verticaal); $A \cap B$ (horizontaal). $(A \cup B)\backslash(A \cap B)$ bestaat uit enkele arcering verticaal.

Rechter plaatje: $A\backslash B$ (verticaal); $B\backslash A$ (horizontaal). $(A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ is het gearceerde gedeelte.

De aangegeven gedeeltes links en rechts komen overeen, en dus $(A \cup B)\backslash(A \cap B) = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

Misverstanden. Geef aan wat de gearceerde gedeeltes weergeven, en om welke gebieden onze aandacht uitgaat. Trek altijd een conclusie.

b. Links kunnen we distributiviteit toepassen, rechts De Morgan. Dat doen we allebei en werken naar elkaar toe.

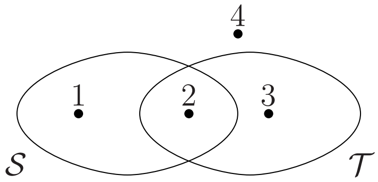
$$\begin{array}{ccl}
(A \cup B) \cap A^c & = & \text{distributiviteit} \\
(A \cap A^c) \cup (B \cap A^c) & = & \text{complement} \\
\varnothing \cup (B \cap A^c) & = & \text{nulelement} \\
(B \cap A^c) & = & \text{dubbel compl} \\
(B^c)^c \cap A^c & = & \text{De Morgan} \\
(B^c \cup A)^c & &
\end{array}$$

Misverstanden. Als je de regel $(B^c \cup A)^c = B \cap A^c$ gebruikt sla je een stap over!

2. zie januari 2008.

Uitleg. Universum $\mathcal{U}$ bestaat uit relaties op $\{a, b, c, d\}$. Het gaat dus *niet* om de losse paren (x, y). Relaties zijn *verzamelingen paren*, nl. deelverzamelingen van het cartesisch product $\{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}$. Daarmee is $\mathcal{U}$ dus de machtsverzameling hiervan, $\mathcal{P}(\ \{a, b, c, d\}^2\ )$.

a.



Punten in het Venn diagram stellen zoals altijd elementen uit het universum voor, hier dus steeds een relatie.

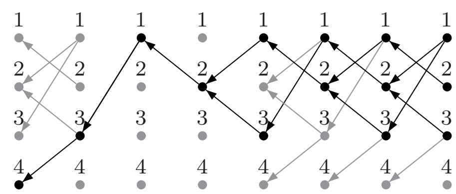
1: $\{(a, b), (b, a)\} \in \mathcal{S} - \mathcal{T}$, niet transitief, wel symmetrisch. *Uitleg.* Transitiviteit zou ook de elementen (a, a) en (b, b) vereisen.
2: $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\} \in \mathcal{T} \cap \mathcal{S}$, transitief en symmetrisch. Ook $\varnothing$ voldoet!
3: $\{(a, b), (b, c), (a, c)\} \in \mathcal{T} - \mathcal{S}$, transitief, niet symmetrisch. Ook $\{(a, b)\}$ voldoet.
4: $\{(a, b), (b, c)\} \in (\mathcal{T} \cup \mathcal{S})^c$, noch transitief, noch symmetrisch.

b. $\{a, b, c, d\}$ heeft 4 elementen, $\{a, b, c, d\}^2$ heeft er dus $4^2 = 16$ (de paren elementen), en $\mathcal{P}(\ \{a, b, c, d\}^2\ )$ tenslotte heeft 2^{16} elementen, elk paar kan namelijk wel/niet gekozen worden.

Misverstanden. Er zijn mensen die de lege verzameling $\varnothing$ apart tellen, maar die is geteld door steeds elk paar niet te kiezen.

3a. Bij een pijldiagram worden twee kopieën van de verzameling $\{1, 2, 3, 4\}$ getekend, en pijen van de ene kopie naar de andere.

b. *Uitleg.* A_n bestaat uit alle knopen waarvandaan een pad van lengte n bestaat naar knoop 4. Je hoeft hiervoor de relatie R^n niet expliciet uit te rekenen. Het is genoeg om pijlen terug te volgen. Als we een eerder gevonden verzameling opnieuw vinden kunnen we stoppen, het proces gaat dan herhalen.



$A_0 = \{4\}$, $A_1 = \{3\}$, $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \{2\}$, $A_4 = \{1, 3\}$, $A_5 = \{1, 2\}$, en tenslotte $A_n = \{1, 2, 3\}$ voor $n \geq 6$.

4a. Als de verzameling eindig is, of als er een bijectie bestaat tussen die verzameling en de natuurlijke getallen.

Ook goed. Als er een surjectieve afbeelding bestaat van $\mathbb{N}$ naar die verzameling.

b. *Uitleg.* De verzameling $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bestaat uit alle paren natuurlijke getallen. Het Cartesisch product is echt héél wat anders dan getallen vermenigvuldigen!

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{\ (i, j) \mid i, j \in \mathbb{N}\ \}$. Dit is de (oneindige) matrix

$$\begin{array}{ccccc} (0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) & \dots \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots \\ (2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots \\ (3,0) & (3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots \\ \dots & \dots & & & \end{array}$$

Er kan een Cantor-wandeling worden uitgevoerd op de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ matrix, zoals in de constructie voor $\mathbb{Q}$. Deze Cantor-wandeling is makkelijker dan het $\mathbb{Q}$-geval, want hier zijn geen dubbelen: $(1, 2) \neq (2, 4)$ terwijl $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Langs de diagonaal lopen geeft (bijvoorbeeld) de volgende bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $0 \mapsto (0, 0), 1 \mapsto (0, 1), 2 \mapsto (1, 0), 3 \mapsto (0, 2), 4 \mapsto (1, 1), 5 \mapsto (2, 0), 6 \mapsto (0, 3), 7 \mapsto (1, 2), \dots$

c. *Opm.* Deze vraag is ambigu, zoals een van u terecht opmerkte.

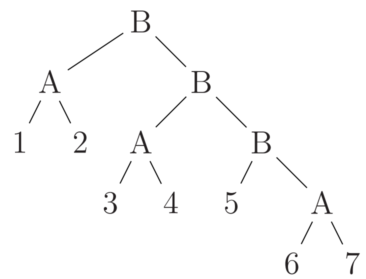
– Deze verzameling bestaat uit alle rijtjes natuurlijke getallen, dus van willekeurige lengte.

– Deze verzameling is aftelbaar, want een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen.

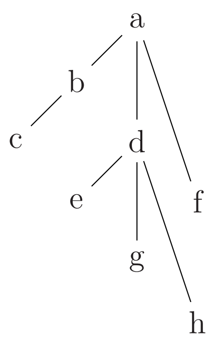
Allebei goed gerekend.

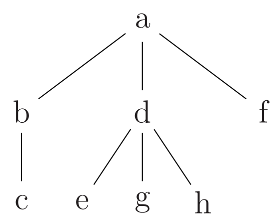
Misverstanden. Ik kwam het antwoord $\mathbb{N}^+$ een aantal keer tegen, en dat lijkt op de notatie van A^+ voor een alfabet A. Dat zijn inderdaad rijtjes (woorden) van lengte groter dan nul. Maar $\mathbb{N}$ is oneindig en eigenlijk geen alfabet. Toch een beetje goed gerekend.

5a.



b. Bij de *eklb*-representatie stellen de rechter kinderen een reeks van broers voor. Een linker kind is het eerste kind van zo'n reeks.





c. Deze opgave kan zowel met 'ja' als met 'nee' beantwoord worden, het gaat hier om de redenatie! Nee, dat kan niet. Als we een expressie opschrijven voor een boom, kunnen we deze alleen 'decoderen' als we weten hoeveel kinderen elke knoop heeft. (Geef een voorbeeld hoe twee bomen dezelfde pre-orde opleveren, bijvoorbeeld.) Ja, dat kan wel: door op de plek van ontbrekende kinderen een speciaal symbool (bv. $-$) te schrijven. Ja, dat kan wel. Als we twee notaties (pre- en symmetrisch) gebruiken ligt de boom vast.

6a. $\sum_{j=0}^{k} 1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k+1 \text{ keer}} = k+1$

$\sum_{k=0}^{n}(k+1) = 1+2+\cdots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

b. *Uitleg.* Deze som volgt de methode die we al veel zagen op college. Bij een sommatie kunnen we bij de inductiestap de laatste term apart nemen. Daarna is het magie (volgens sommigen) of middelbare school wiskunde (denk ik).

basis. $n = 0$: links $\sum_{k=0}^{0} r^k = r^0 = 1$; rechts $\frac{r^{0+1}-1}{r-1} = 1$. Komt overeen.

inductie. Inductiehypothese[1] tussen haken.

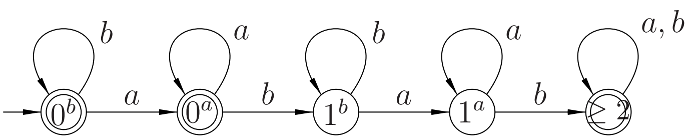
$\sum_{k=0}^{n+1} r^k = \left[\sum_{k=0}^{n} r^k\right] + r^{n+1} =$

$\left[\frac{r^{n+1}-1}{r-1}\right] + r^{n+1} = \frac{r^{n+1}-1+r^{n+1}(r-1)}{r-1} = \frac{r^{n+2}-1}{r-1}$

7. Zie de uitwerkingen van maart 2009, opgave 5acd.

8a. *Misverstanden.* Een eindige automaat heeft letters op de takken staan, niet in de toestanden (tenzij we ze als naam gebruiken). Complement: nul, twee of meer.

Idee. De automaat onthoudt de laatst gelezen letter en telt ab's (nul, één, veel). (We hoeven geen aparte toestand bij te houden voor 'niets gelezen' want die kunnen we samen laten vallen met 'b gelezen en nul voorkomens ab', maar het is geen bezwaar om daar niet voor te kiezen.)



b. $aba \in K$, and $bab \in K$, dus $ababab \in K^2$ heeft drie voorkomens ab.

c. Expressie voor complement van K. Nul ab, dwz. geen b na a: taal b^*a^*.

Tenminste twee ab: taal $\{a,b\}^*ab\{a,b\}^*ab\{a,b\}^*$

Samen $b^*a^* \cup \{a,b\}^*ab\{a,b\}^*ab\{a,b\}^*$

Je kunt ook een expressie bepalen nav. de automaat, dat levert hier een wat langer resultaat, maar ook weer niet al te ingewikkeld: $b^* \cup b^*aa^* \cup b^*aa^*bb^*aa^*b\{a,b\}^*$

Misverstanden. Door een ongelukkige formulering in de opgave (gaat het om K of om het complement?) mag je ook een expressie voor K zelf geven: $b^*a^*\,ab\,b^*a^*$. Die 'ab' binnenin zorgen voor dat beide letters tenminste een keer voorkomen.

HJH jan/feb'14

[1] inductieaanname