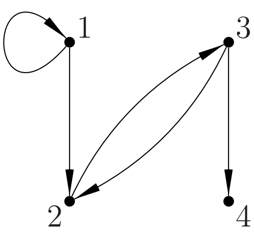
1a.

$$\begin{aligned}(V\cap W)\cap(V\cup W) &= \quad d\\ ((V\cap W)\cap V)\cup((V\cap W)\cap W) &= \quad c\\ ((W\cap V)\cap V)\cup((V\cap W)\cap W) &= \quad 2{\times}a\\ (W\cap(V\cap V))\cup(V\cap(W\cap W)) &= \quad i\\ (W\cap V)\cup(V\cap W) &= \quad c\\ (V\cap W)\cup(V\cap W) &= \quad i\\ V\cap W &\end{aligned}$$

a: associatief
c: commutatief
d: distributief
i: idempotent

b. Er geldt $X\in\mathcal{P}(V)$ als $X\subseteq V$, en $X\subseteq\mathcal{P}(V)$ als elk element van X een deelverzameling van V is.
Ja. Altijd $\varnothing\in\mathcal{P}(V)$ omdat $\varnothing\subseteq V$.
Nee. Alleen $\{\varnothing\}\in\mathcal{P}(V)$ als $\varnothing$ een *element* is van V; dat is hier niet het geval.
Ja. Alleen $\{\{\varnothing\}\}\in\mathcal{P}(V)$ als $\{\varnothing\}$ een element is van V; dat is hier wél het geval.
Ja. Altijd $\varnothing\subseteq\mathcal{P}(V)$ omdat $\varnothing$ een deelverzameling van élke verzameling is.
Ja. Altijd $\{\varnothing\}\subseteq\mathcal{P}(V)$ omdat $\varnothing\in\mathcal{P}(V)$.
Nee. Alleen $\{\{\varnothing\}\}\subseteq\mathcal{P}(V)$ als $\{\varnothing\}$ een element is van $\mathcal{P}(V)$; dat is niet het geval, zie boven.

2a.

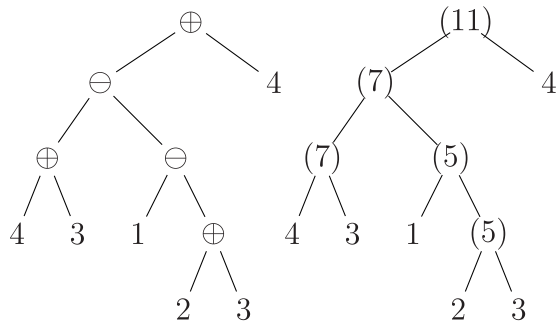


b. $M\circ M$, ontstaat door twee takken achter elkaar te nemen:
$(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,4),(3,3)$.

$M^{-1}\circ M$, tak achteruit, dan vooruit, bestaat uit: $(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)$.

c. Een graaf is ongericht als de bijbehorende matrix symmetrisch is. Een multi-graaf heeft geen lussen als de bijbehorende matrix alleen nullen op de diagonaal heeft. Een relatie is functioneel als in de bijbehorende graaf uit elke knoop ten hoogste één tak vertrekt, dus als in de bijbehorende matrix elke rij ten hoogste één waarde ongelijk nul is.

3ab.



c. Elk blad heeft één blad ‘onder’ zich, bij elke andere knoop tellen we de aantallen ‘onder’ de kinderen op.
Basis $f(\text{blad})=1$, recursie $f(\text{knoop})=f(\text{links})+f(\text{rechts})$.

4a. Met inductie. *basis.* De strings λ en b hebben geen subwoord bb.

inductiestap. Neem aan dat x toegestaan is, en dat x geen subwoord bb heeft (inductieveronderstelling). De woorden xa en xab die ook toegestaan zijn volgens ii hebben ook geen subwoord bb omdat x dat niet had, en er niet bb kan onstaan door het achterplakken van a of ab.

b. Met inductie naar het aantal a’s: elk woord (over $\{a,b\}$) zonder subwoord bb is toegestaan.

basis. Een woord zonder subwoord bb met nul a’s is toegestaan. Er zijn slechts twee woorden over $\{a,b\}$ die hieraan voldoen, λ en b. Deze twee zijn toegestaan volgens i.

inductiestap. Neem aan dat elk woord met n letters a dat geen subwoord *bb* heeft toegestaan is (inductieveronderstelling). We laten deze bewering nu zien voor $n+1$ letters a. Neem aan y heeft $n+1$ letters a en geen subwoord bb. Vanwege dat laatste eindigt y op ten hoogste één b, dus op a of op ab. Dus y is van de vorm xa of xab waarbij x dan n letters a heeft en ook geen subwoord bb. Vanwege de inductieveronderstelling is x toegestaan, en mag daaruit volgens ii de toegestane y worden geconstrueerd.

c. b is toegestaan, maar $b \cdot b = bb$ niet, omdat volgens **a** hierboven toegestane woorden geen subwoord bb hebben.

5a. Natuurlijk $6 \equiv -1 \bmod 7$.

$\bar{x}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{x}^2$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$\bar{x}^3$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$-\bar{1}$	$\bar{1}$	$-\bar{1}$	$-\bar{1}$
$\bar{x}^6$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$

b. Er geldt voor elke gehele n (niet nul modulo 7) dat $\bar{n}^6 = \bar{1}$ (zie hierboven), oftewel $n^6 \equiv 1 \bmod 7$, dus $n^6 - 1 \equiv 0 \bmod 7$. Met andere woorden rest nul bij deling van $n^6 - 1$ door 7 (voorzover n niet deelbaar door 7).

c. Modulo zeven: $100 \equiv 7 * 14 + 2 \equiv 2$, en $70 \equiv 7 * 10 \equiv 0$. We weten uit **b** dat $2^6 \equiv 1$. Dus $100^{100} \equiv 2^{100} \equiv 2^{6*6+4} \equiv 2^{6*6} * 2^4 \equiv 1 * 16 \equiv 2$. Natuurlijk geldt $70^{70} \equiv 0^{70} \equiv 0$. Samen rest 2.

6a. Een equivalentierelatie E is reflexief (xEx voor alle x), symmetrisch (als xEy dan ook yEx) en transitief (als xEy en yEz dan xEz).

b. Er geldt $0R1$, $2R4$ en $5R2$ maar *niet* $3R1$.

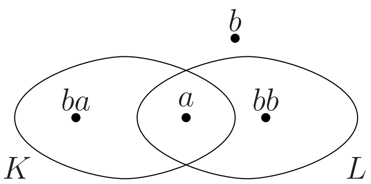
Vanwege transitiviteit ook $5R4$ (vanwege $5R2$ en $2R4$) en dan via symmetrie $5R4$, als gevraagd.

Stel dat $0R3$, dan ook $3R0$ (symmetrie). Vanwege $0R1$ tenslotte $3R1$ (transitief). Dit is in tegenspraak met het gegeven, dus *niet* $0R3$.

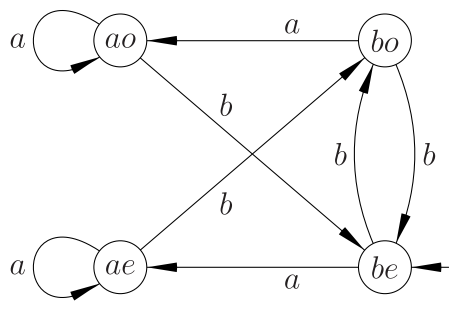
c. Bij elkaar in de klasse 0 en 1, en ook $2, 4$ en 5, maar *niet* 3 en 1. Er zijn meerdere relaties die voldoen. De klassen zijn:
$\{0,1\}$, $\{2,4,5\}$, $\{3\}$.
$\{0,1,2,4,5\}$, $\{3\}$.
$\{0,1\}$, $\{2,4,5,3\}$.

(Tentamen December 2003)

7a. Het lege woord λ behoort tot $L - K$, dat is waar hieronder bb staat.



b. Maak onderscheid in de kenmerkende eigenschappen van K en L, en dat zijn de laatste letter, en de 'pariteit' van het aantal b's. Dit geeft vier toestanden ae, be, ao en bo. De toestanden ae en ao horen bij K, de toestanden ae en be horen bij L. Omdat het lege woord geen laatste letter heeft zouden we nog een vijfde toestand λe kunnen nemen (nul is even) maar de toestand be kan ook dienen als begintoestand.



Eindtoestanden bij $K \cup L$ zijn dan ae, ao en be; enige eindtoestand bij $K \cap L$ is ae.

HJH aug '04, verbeterd