

- 1a.** Een deelverzameling van V heeft elk van de n elementen wél of niet. We komen tot 2^n mogelijkheden.
- b.** Altijd $\emptyset \in \mathcal{P}(V)$ omdat $\emptyset \subseteq V$.
 Altijd $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(V)$ omdat \emptyset een deelverzameling van elke verzameling is.
 Alleen $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(V)$ als \emptyset een *element* is van V .
 Altijd $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(V)$ omdat $\emptyset \in \mathcal{P}(V)$, zie boven.
- c.** Ja, dat geldt. Omdat $U \subseteq U$ volgt $U \in \mathcal{P}(U) = \mathcal{P}(V)$, en dus $U \subseteq V$. Evenzo $V \subseteq U$, en dus $U = V$.
- 2a.** X^2 , twee takken achter elkaar, bestaat uit: $(0, 2), (0, 5), (1, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 5), (4, 1)$.
 $X; X^{-1}$, tak heen dan tak terug, bestaat uit: $(0, 0), (0, 3), (1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 0), (3, 3), (4, 1), (4, 4)$.
- b.** R is injectief als in elk punt van V ten hoogste één pijl aankomt. Dit is precies het geval als $R; R^{-1} \subseteq 1_V$.
- c.** R is transitief als voor elk twee opeenvolgende takken xRy en yRz ook de tak xRz aanwezig is. Dit is precies het geval als $R; R \subseteq R$.
- 3a.** Een verzameling is aftelbaar als zij eindig is of gelijkmachting aan \mathbb{N} .
- b.** Orden $\{a, b\}^*$ naar lengte en vervolgens lexicografisch: $\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots$. Daarmee ontstaat een aftelling van $\{a, b\}^*$ (een bijectie tussen \mathbb{N} en $\{a, b\}^*$).
- c.** Gegeven een functie $f : V \rightarrow \mathcal{P}(V)$ kiezen we $D = \{x \in V \mid x \notin f(x)\}$. Voor $x \in V$ geldt per definitie $x \in D \iff x \notin f(x)$.
 Als f surjectief is, dan moet er een $v \in V$ zijn met $D = f(v)$, immers $D \subseteq V$ en dus $D \in \mathcal{P}(V)$. Vul nu v voor x in: $v \in D \iff v \notin f(v) = D$, tegenspraak.
 Willekeurig gekozen f kan niet surjectief zijn, en daarmee bestaan geen surjectieve functies van V naar $\mathcal{P}(V)$.
- 4.** Bewijs met volledige inductie de bewering dat elke Blurp een oneven aantal Δ heeft of tenminste één \diamond .
 Basis: Δ is een Blurp en heeft een oneven aantal Δ .
 Inductie. Neem aan dat x en y Blurpen zijn die aan de bewering voldoen. We laten zien dat nu ook de daaruit geconstrueerde Blurp-en voldoen.
regel 2: Als x een oneven aantal Δ heeft, dan $x\Delta\Delta$ ook; als x een \diamond heeft, dan $x\Delta\Delta$ ook. De string $\diamond xx\diamond$ heeft een \diamond (ongeacht x).
regel 3: Als x en y geen \diamond hebben, dan hebben zij elk een oneven aantal Δ , en $x\Delta y$ ook. Anders heeft of x of y een \diamond , of allebei, en $x\Delta y$ ook.
- 5a.** reflexief: xEx voor alle x ,
 symmetrisch: als xEy dan ook yEx , en
 transitief: als xEy en yEz dan xEz .
- b.** reflexief: $(a, b) \sim (a, b)$ omdat $ab = ba$,
 symmetrisch: als $(a, b) \sim (c, d)$ dan $ad = bc$ dus $cb = da$ oftewel $(c, d) \sim (a, b)$,
 transitief: als $(a, b) \sim (c, d)$ en $(c, d) \sim (e, f)$ dan $ad = bc$ en $cf = de$; daarom $adf = bcf = bde$; na delen door $d \neq 0$ $af = be$ oftewel $(a, b) \sim (e, f)$.
- c.** Breuken. Schrijf $\frac{a}{b}$ in plaats van (a, b) . Dan $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ desdals $ad = bc$.
- 6a.** We rekenen modulo 7, het aantal dagen per week. De genoemde datum valt over precies twaalf jaar, dus twaalf maal 365 dagen plus drie schrikkeldagen. Omdat $365 \equiv 1 \pmod{7}$

is dit samen $12 \cdot 365 + 3 \equiv 12 + 3 \equiv 1 \pmod{7}$, en valt 18 maart 2016 één dag later, op vrijdag.

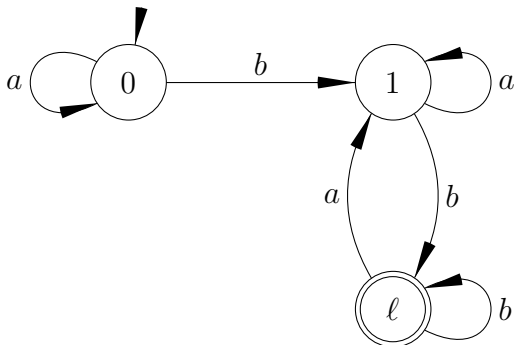
b. Algemeen geldig (als tenminste $z \geq 0$).

We weten, als $x_1 \equiv y_1 \pmod{m}$ en $x_2 \equiv y_2 \pmod{m}$, dan ook $x_1 \cdot x_2 \equiv y_1 \cdot y_2 \pmod{m}$.

Wanneer gegeven is dat $x \equiv y \pmod{m}$, dan volgt met bovenstaande eigenschap (en inductie) dat $x^z \equiv y^z \pmod{m}$ voor elke $z \geq 0$.

c. Dit is niet algemeen geldig. Een voorbeeld modulo 3. $1 \equiv 4 \pmod{3}$, maar $2^1 \equiv 2$, terwijl $2^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod{3}$.

7a. De slimste automaat heeft drie toestanden: 0 nog geen b gezien, 1 tenminste één b , ℓ laatste letter b (en al eerder b gezien).



b. Twee b 's, waarvan één de laatste letter, verder elke string toegestaan: $\{a, b\}^* \cdot b \cdot \{a, b\}^* \cdot b$,
ook wel geschreven als $(a+b)^* b (a+b)^* b$.