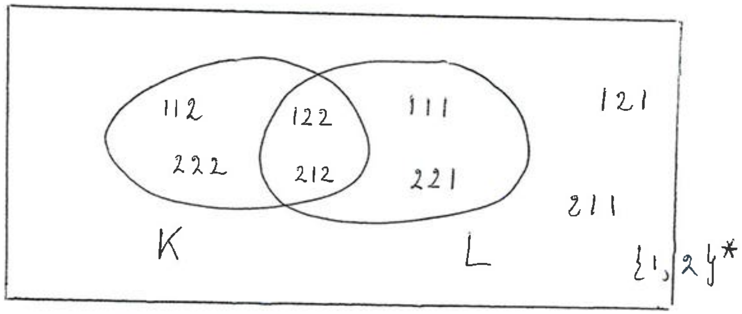
- oktober 2017 -

1 $K = \{ w \in \{1,2\}^* \mid w \text{ eindigt op een } 2 \}$

$L = \{ w \in \{1,2\}^* \mid w \text{ heeft een oneven aantal 1-en} \}$



Strings lengte 3: 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222

2.

$$A \cap ((B \cap A^c)^c \cap A) \overset{\text{commutativiteit}}{=}$$

$$((B \cap A^c)^c \cap A) \cap A \overset{\text{associativiteit}}{=}$$

$$(B \cap A^c)^c \cap (A \cap A) \overset{\text{idempotentie}}{=}$$

$$(B \cap A^c)^c \cap A \overset{\text{de Morgan}}{=}$$

$$(B^c \cup A^{cc}) \cap A \overset{\text{dubbel complement}}{=}$$

$$(B^c \cup A) \cap A \overset{\text{2x commutativiteit}}{=}$$

$$A \cap (A \cup B^c) \overset{\text{HINT, nulelement}}{=}$$

$$(A \cup \emptyset) \cap (A \cup B^c) \overset{\text{distributiviteit}}{=}$$

$$A \cup (\emptyset \cap B^c) \underset{\text{commutativiteit}}{=} A \cup (B^c \cap \emptyset) \underset{\text{nul-element}}{=} A \cup \emptyset \underset{\text{nul-element}}{=} A$$

QED

Dit is een mogelijke afleiding.

3. (a) $\mathcal{P}(\{a\}) = \{$alle deelverzamelingen van $\{a\}\}$

$= \{\emptyset, \{a\}\}$.

$\mathcal{P}\mathcal{P}(\{a\}) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{a\}\}) =$

$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}$

(b) "$\Rightarrow$" Stel dat $A \subseteq B$. Te bewijzen: $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

neem een willekeurige $V \in \mathcal{P}(A)$, dan is V dus een deelverzameling van A, ofwel $V \subseteq A$. Ook is $A \subseteq B$, dus $V \subseteq B$, m.a.w. V is (ook) een deelverzameling van B. Derhalve is $V \in \mathcal{P}(B)$

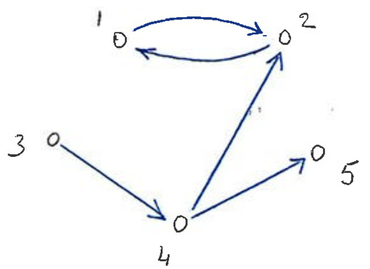
Dit geldt voor elke $V \in \mathcal{P}(A) \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

"$\Leftarrow$" Stel dat $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Te bewijzen dat $A \subseteq B$.

We weten dat $A \in \mathcal{P}(A)$. Omdat $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ is dus ook $A \in \mathcal{P}(B)$. M.a.w. A is een deelverzameling van B, ofwel $A \subseteq B$.

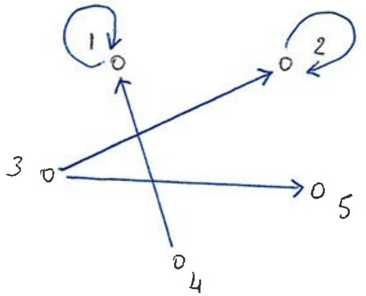
Q.E.D.

4 (a) graaf corresponderend met R:



$\{(1,2), (2,1), (3,4), (4,2), (4,5)\}$

graaf corresponderend met R^2:



$\{(1,1), (2,2), (3,2), (3,5), (4,1)\}$

(b) Merk op dat $R \cup R^2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,2), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,5)\}$

(nog) niet transitief is.

Als we R^3 bepalen vinden we: $R^3 = \{(1,2),(2,1),(3,1),(4,2)\}$

$R^1 \cup R^2 \cup R^3 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,5)\}$

en deze is wel transitief.

Dus $R^+ = R^1 \cup R^2 \cup R^3$

5. (i) $x + x = 2x$ is even $\Rightarrow xSx$ reflexief &

(ii) $x + y = y + x$, dus:

als xSy dan ySx ($x+y$ even $\Rightarrow y+x = x+y$ even)

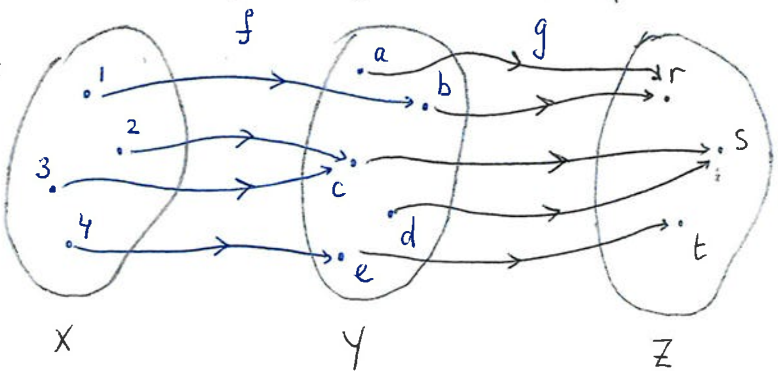
(iii) xSy en ySz: $x+y$ even

$y+z$ even +

$x + \underbrace{2y}_{\text{even}} + z$ even $\Rightarrow x+z$ even, ofwel xSz.

6. $g \circ f: X \longrightarrow Z$ moet surjectief zijn $\Rightarrow$ g moet zeker surjectief zijn, anders kunnen nooit alle $z \in Z$ worden bereikt. Voor het gevraagde voorbeeld kiezen we dus een functie f die niet surjectief is en een functie g die wel surjectief is.

Een voorbeeld:



f en g functies, dus elke $x \in X$ heeft een beeld $f(x)$ en elke $y \in Y$ heeft een beeld $g(y)$

7 (a) Elke tak $e = (u, w)$ levert een bijdrage 2 aan $\sum_{v \in V} \deg(v)$, namelijk 1 voor de graad van u en 1 voor de graad van w. In $\sum_{v \in V} \deg(v)$ wordt elke tak zo dus 2 x geteld. Vandaar: $2 \cdot |E$

(b) Uit (a) volgt: $\sum_{v \in V} \deg(v)$ is even.

- een 5-reguliere graaf met 7 knopen: elke knoop heeft graad 5 $\Rightarrow \sum_{v \in V} \deg(v) = 7 * 5 = 35$ is oneven.

Zo'n graaf kan i.v.m (a) dus niet bestaan. Dus aantal = 0.

- bipartiete graaf met 7 knopen; dan is V te verdelen in
  - een verzameling van 1 knoop en een verzameling van 6 knopen
  - een van 2 knopen en een van 5 knopen
  - of een van 3 knopen en een van 4 knopen

Omdat de graaf volledig bipartiet is, ligt daarna de graaf vast:

$K_{1,6}$

$K_{2,5}$

$K_{3,4}$

8. (a) Beeld 2 en 3 af op a en c; de rest volgt dan "vanzelf", bijvoorbeeld 5 moet dan wel op b worden afgebeeld.

Isomorfisme $f: \{0,1,2,3,4,5\} \to \{a,b,c,d,e,f\}$ is

als volgt: $f(2) = a$; $f(3) = c$; $f(5) = b$

$f(1) = d$; $f(4) = e$; $f(0) = f$.

↑ andere buur van a

andere buur van 2

Dan geldt: (i,j) lijn in $G_1 \Leftrightarrow (f(i), f(j))$ lijn in G_3

8 (b) G_2 niet isomorf met G_1 (en dan dus ook niet met G_3)
omdat:

- G_1 bevat 1 kring ter lengte 3 en G_2 bevat er 2.

of

- in G_1 hebben de 2 knopen van graad 2 afstand 2 tot elkaar (pad ter lengte 2 van 2 naar 3); in G_2 hebben 1 en 6 (knopen van graad 2) afstand 3 tot elkaar

9 Basis

$n=1$ Er geldt: $1+\sum_{i=1}^{1}(i\cdot i!) = 1+1\cdot 1! = 2$

en $(1+1)! = 2! = 2\cdot 1 = 2$

8.

De gelijkheid geldt dus voor $n=1$.

Inductiestap: te bewijzen: als $1+\sum_{i=1}^{n}(i\cdot i!) = (n+1)!$

dan is $1+\sum_{i=1}^{n+1}(i\cdot i!) = (n+1+1)! = (n+2)!$

Inductie-aanname is dus:
stel dat $1+\sum_{i=1}^{n}(i\cdot i!) = (n+1)!$

Dan
$$1+\sum_{i=1}^{n+1}(i\cdot i!) = \underbrace{1+\sum_{i=1}^{n}(i\cdot i!)}_{\overset{\text{i.a.}}{=}\,(n+1)!} + (n+1)\cdot(n+1)!$$

$$= (n+1)! + (n+1)(n+1)! = (1+n+1)(n+1)!$$
$$= (n+2)(n+1)! = (n+2)!$$

Q.E.D.