

- 1) **a.** Persoon 1 kan kiezen uit 11 stoelen, persoon 2 heeft dan nog 10 mogelijkheden, persoon 3 nog 9, etcetera. Dit geeft in totaal:  $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ . De volgorde is van belang;  $-, 2, -, 6, -, 1, 5, -, 3, 4, -$  is namelijk een andere rangschikking dan bijvoorbeeld  $-, 6, -, 2, -, 1, 5, -, 3, 4, -$ .  
Andere oplossingsmethode: kies eerst de 6 stoelen die gebruikt gaan worden:  $\binom{11}{6}$  manieren. Voor elk van die keuzes kunnen we de zes personen er op  $6!$  manieren op neerzetten. Samen:  $6! \cdot \binom{11}{6}$ . Precies hetzelfde als het eerder gevonden aantal, want  $\binom{11}{6} = \frac{11!}{6! \cdot 5!}$ .
- b.** Tien personen in een rij plaatsen geeft  $10!$  mogelijkheden. Als ze in een kring zitten/staan maakt het niet uit waar je begint met de mensen neer te zetten. In dit geval heb je dus  $\frac{10!}{10} = 9!$  mogelijke tafelschikkingen.  
(Merk op dat we  $1, 2, 3$  en  $1, 3, 2$ , waarbij 1 zit tussen 2 en 3 als het om een ronde tafel gaat, wel als verschillend zien. Immers in het ene geval zit 2 links van 1 en 3 rechts, en in het andere geval is dat precies andersom.)
- 2) **a.** Rijtje ter lengte 8. Kies de 5 posities waar de enen moeten staan. Vervolgens liggen de posities van de nullen vast. Totaal dus  $\binom{8}{5} = 56$  mogelijke rijtjes. De enen zijn niet te onderscheiden, dus volgorde niet van belang.
- b.** Dezelfde redenering als bij **a.** geeft:  $\binom{n}{k}$  mogelijke rijtjes.
- c.** We kiezen weer de  $k$  posities waar de enen gaan komen. Dit kan op  $\binom{n}{k}$  manieren. Vervolgens zijn er nog  $n - k$  plaatsen over. Op elke daarvan kan ofwel een 0 ofwel een 2 staan, dus 2 mogelijkheden per plek. Totaal zijn er dus  $2^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$  van dit soort rijtjes.
- 3) **a.** Een lijn is een ongeordend paar knopen, dus het aantal mogelijke lijnen is het aantal manieren om 2 knopen uit  $n$  te kiezen, waarbij de volgorde niet uitmaakt. Dat kan op  $\binom{n}{2}$  manieren, dus zo'n graaf heeft maximaal  $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n - 1)$  lijnen.  
(Dit kan ook beredeneerd worden door op te merken dat je vanuit elke knoop een lijn kunt hebben naar elke andere knoop, dus  $n - 1$  stuks. Dit zou  $n(n - 1)$  opleveren, maar we moeten nog door 2 delen omdat we elke lijn hier dubbel tellen, namelijk als  $\{u, v\}$  en als  $\{v, u\}$ . Zie de colleges over grafen.)
- b.** Nu is de volgorde wel van belang;  $(u, v) \neq (v, u)$ . Tevens mag je in een gerichte graaf een lus hebben, dus een pijl van de vorm  $(u, u)$ . We tellen dus geordende rijtjes van lengte 2, waarbij de knopen niet verschillend hoeven te zijn. Aantal mogelijkheden:  $n \cdot n = n^2$ .
- 4) **a.** Zo'n functie kent aan elke  $x$  uit  $\{1, 2, 3\}$  precies één waarde uit  $\{1, 2, 3\}$  toe. Voor elke  $x$  zijn er 3 mogelijkheden:  $f(x) = 1$  of  $f(x) = 2$  of  $f(x) = 3$ . In totaal zijn er dus  $3^3 = 27$  verschillende functies mogelijk.
- b.** Dezelfde redenering als bij **a.** geeft:  $n^n$  mogelijke functies van  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  naar  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ .
- c.** Voor een bijectie  $f$  geldt dat niet alleen elke  $x$  uit het domein één beeld heeft, maar

ook dat elk element uit het codomein als beeld voorkomt, en dat twee verschillende originelen altijd verschillende beelden hebben. Dus  $f(x) = f(y)$  met  $x \neq y$  komt niet voor. Dat betekent dat de rij beelden  $(f(1), f(2), \dots, f(n))$  een permutatie van 1 t/m  $n$  voorstelt. Er zijn dus  $n!$  verschillende bijecties van  $\{1, 2, \dots, n\}$  naar  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

$$\begin{aligned} 5) \quad \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k}{n} \cdot \binom{n}{k}. \\ \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{n-k}{n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n-k}{n} \cdot \binom{n}{k}. \\ \text{Dus } \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \left(\frac{k}{n} + \frac{n-k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} = \frac{k+n-k}{n} \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$