**Toets Fundamentele Informatica 1**
**dinsdag 24 oktober 2017, 11.00 – 13.00 uur**

Geef bij elke opgave een *duidelijke uitleg*. Veel succes!

**1)** Gegeven zijn de talen

$$K = \{\ w \in \{1,2\}^* \mid w \text{ eindigt op een } 2\ \} \qquad \text{en}$$

$$L = \{\ w \in \{1,2\}^* \mid w \text{ heeft een oneven aantal 1-en } \}$$

Teken een Venn-diagram van $\{1,2\}^*$ met daarin $K$ en $L$.
Plaats elk van de (acht) woorden van lengte drie in het juiste gebied.

**2)** Gebruik de axioma's/regels van de verzamelingenalgebra om de volgende gelijkheid te bewijzen: $A \cap ((B \cap A^c)^c \cap A) = A$.

Benoem de gebruikte regels.

Hint. De volgende gelijkheden kunnen nuttig zijn in je bewijs: $A \cap (A \cup B^c) = (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B^c)$ en $A \cup (A \cap B^c) = (A \cap U) \cup (A \cap B^c)$. Welke regel is hier gebruikt?

**3)** (a) Bepaal $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$.

(b) Bewijs: $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Je moet dus twee kanten op bewijzen: (i) als $A \subseteq B$ dan $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
<u>en</u> (ii) als $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ dan $A \subseteq B$

**4)** $R = \{(1,2), (2,1), (3,4), (4,2), (4,5)\}$ is een relatie in $\{1,2,3,4,5\}$.

(a) Teken de gerichte grafen corresponderend met $R$ en $R^2 = R \circ R$.

(b) Bepaal de transitieve afsluiting $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$. Geef $R^+$ als verzameling van paren, zoals boven.

**5)** De relatie $S$ in $\mathbb{Z}$ is gedefinieerd als: $xSy$ als $x + y$ even is.

Ga na of $S$ (i) reflexief, (ii) symmetrisch, (iii) transitief is.

**6)** Geef twee functies $f\colon X \to Y$ en $g\colon Y \to Z$ waarvan de samenstelling $g \circ f\colon X \to Z$ wél surjectief is, maar $f$ en $g$ zelf niet allebei surjectief zijn.

Geef $f$ en $g$ door het tekenen van een pijldiagram.

Hint. Het lukt niet als $|X| = |Y| = |Z|$.

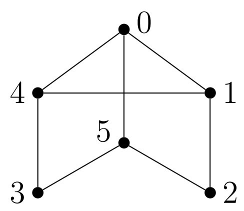
z.o.z.

**7)** (a) Leg uit waarom voor een ongerichte graaf $G = (V, E)$ geldt: de som der graden is twee keer het aantal lijnen, ofwel $\Sigma_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$.

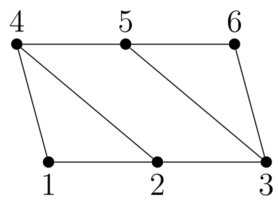
(b) Hoeveel 5-reguliere grafen bestaan er met 7 knopen? En hoeveel volledig bipartiete grafen met 7 knopen? Motiveer je antwoord en teken ze allemaal.

**8)** (a) De ongerichte grafen $G_1$ en $G_3$ hieronder zijn isomorf. Geef een isomorfisme tussen $G_1$ en $G_3$.

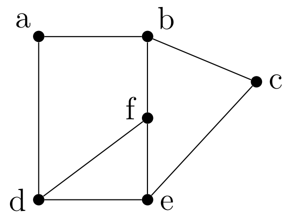
(b) $G_2$ is niet isomorf met de andere twee grafen. Geef een eenvoudig argument waarom dat niet het geval is.



$G_1$



$G_2$



$G_3$

**9)** Bewijs met behulp van volledige inductie dat $1 + \sum_{i=1}^{n} (i \cdot i!) = (n+1)!$ voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$.

Punten: 1: 5; 2: 6; 3: 6; 4: 6; 5: 5; 6: 5; 7: 6; 8: 6; 9: 5