Toets Fundamentele Informatica 1 **25 oktober 2016, 14.00–16.00**

Deze toets bestaat uit tien opgaven. *Geef steeds voldoende uitleg.* Succes!

1) Gegeven zijn de volgende twee talen over $\{0,1\}$:
$K = \{ \ w \mid w \text{ begint met een } 1 \ \}$ en $L = \{ \ w \mid w \text{ heeft even lengte } \}$.

De taal T is gelijk aan $\{ \ w \mid \text{als } w \text{ even lengte heeft, dan moet } w \text{ met een } 1 \text{ beginnen } \}$.

Druk T uit in K en L, waarbij je alleen gebruik mag maken van de Boolese operaties vereniging, doorsnede en complement ($\cup$, $\cap$, ^{c}).

TIP: probeer een aantal strings uit.

2) Laat zien dat voor verzamelingen A en B geldt dat $(\ A \cap B\ ) \cup A^c = (\ A \cap B^c\ )^c$, door twee duidelijke Venn-diagrammen te tekenen (met uitleg).

3) Ga voor elk van de volgende vier beweringen na of deze voor élke verzameling V geldt, voor geen enkele, of voor sommige verzamelingen. Leg uit.

(a) $\varnothing \in \mathcal{P}(V)$ (b) $\varnothing \subseteq \mathcal{P}(V)$ (c) $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(V)$ (d) $\{\varnothing\} \subseteq \mathcal{P}(V)$

4) Neem aan dat het volgende resultaat bekend is.

Lemma. Voor alle eindige verzamelingen $A, B \subseteq U$ geldt dat $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Bewijs hiermee het principe van inclusie en exclusie voor drie eindige verzamelingen A, B, C.

5) De relatie $C \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ is gedefinieerd als de paren getallen die op afstand kleiner dan 1 liggen: $C = \{(x, y) \mid |x - y| < 1\}$.

Ga na of C (a) reflexief, (b) symmetrisch, en/of (c) transitief is.

6) Gegeven $R = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 3)\} \subseteq \{a, b, c\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ en $S = \{(1, a), (2, b), (3, a), (4, c)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{a, b, c\}$.

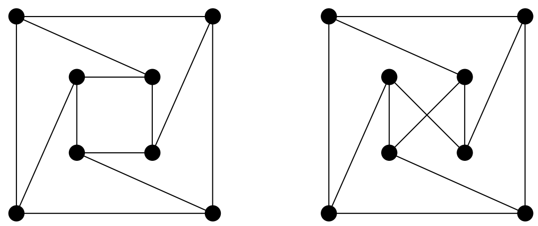
Bepaal de gerichte graaf voor $R \circ S$ en voor $S \circ R$.

7) Geef twee functies $f : X \to Y$ en $g : Y \to Z$ waarvan de samenstelling $g \circ f : X \to Z$ wél injectief is, maar f en g zelf niet allebei injectief zijn.

(Je mag f en g geven door het tekenen van een pijldiagram.)

TIP: Gaat niet lukken als $|X| = |Y| = |Z|$.

8) Onderzoek of de volgende grafen bipartiet zijn.



9) Teken een gerichte, zwak samenhangende graaf met vijf knopen, die wel een bron heeft, maar geen put.
Leg uit dat dit niet lukt voor *sterk* samenhangend (in plaats van zwak).

10) Gegeven is de volgende recursief gedefinieerde functie $f(n)$ voor $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(k) & \text{anders} \end{cases}$$

Bepaal $f(7)$. Uitgaande van deze berekening, wat is de gesloten formule voor $f(n)$, $n \geq 1$?