Tentamen Fundamentele Informatica 1
maandag 7 januari 2019, 14.00 – 17.00 uur

Dit tentamen heeft 7 opgaven, met in totaal 20 onderdelen die elk 0,5 punten waard zijn, behalve 5a (0,4 punten) en 5c (0,6 punten).
Geef bij elke opgave een *duidelijke uitleg/toelichting.* Veel succes!

1) **a.** Laat met behulp van Venn-diagrammen zien dat

$$(A \cap (A^c \cup B)^c) \cup (A \cap B) = A$$

Teken *(ten minste) twee* Venn-diagrammen: één voor het afleiden van het gebied behorende bij $(A^c \cup B)^c$ en vervolgens minstens één voor de afleiding van het linkerlid van de gelijkheid als geheel. Trek ten slotte je conclusie.

b. Gebruik nu de axioma's/regels van de verzamelingenalgebra om bovenstaande gelijkheid te bewijzen. Benoem de gebruikte regels.

2) **a.** Hoeveel elementen heeft de verzameling $\{a, b\} \times \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$? Licht je antwoord toe en geef drie van die elementen.

In de volgende twee onderdelen zijn A en B twee willekeurige verzamelingen.

b. Bewijs dat $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

c. Laat met een eenvoudig voorbeeld zien dat er in het algemeen geen gelijkheid geldt.

3) Deze opgave gaat over ongerichte, samenhangende grafen.

a. Teken de vijf niet-isomorfe samenhangende ongerichte grafen met vijf knopen en vijf lijnen.

b. Geef voor elk van de in **a.** getekende grafen aan welke bipartiet zijn en welke niet. Als een graaf bipartiet is, geef dan een correcte opsplitsing van de knopen; zo niet, geef dan aan waarom niet.

c. Als een samenhangende graaf een Eulercircuit heeft, is de graad van elke knoop even. Bewijs dit.

d. Hebben de grafen $K_{2,4}$ (volledig bipartiet) en K_6 (volledig) een Eulercircuit? Zo ja, teken de graaf, nummer de knopen en geef een Eulercircuit; zo nee geef aan waarom niet.

4) Definieer $A = \{1, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots\}$ en $B = \{1, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots\}$, dus A is de verzameling van alle tweemachten en B de verzameling van alle driemachten.

a. Toon aan dat $A \cup B$ aftelbaar is door een *bijectie* van $\mathbb{N}$ naar $A \cup B$ aan te geven.

b. Het is bekend dat $\mathbb{R}$ niet aftelbaar (overaftelbaar) is. Bewijs nu dat $\mathbb{R} \backslash A$ ook overaftelbaar is.

zie ommezijde

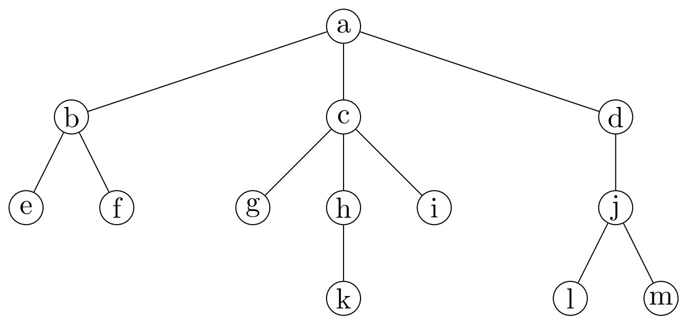
5) **a.** Bereken x^2, x^3 en x^4 modulo 6 voor $x = 1, 2, \ldots, 5$.

b. Laat zien: $42 \cdot 4^{2016} + 51 \cdot 15^{2017} + 22 \cdot 8^{2018} + 37 \cdot 11^{2019}$ is deelbaar door 6.

In onderdeel **c.** hieronder mag geen gebruik gemaakt worden van modulo-rekenen zoals in **a.** en **b.** wél de bedoeling was.

c. Bewijs met behulp van *volledige inductie* dat $5 \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot 5^n$ deelbaar is door 6 voor alle $n \geq 0$. Formuleer daarbij duidelijk je inductiehypothese en wat je vervolgens precies moet aantonen.

6) Bekijk onderstaande geordende, gewortelde boom T:



a. Geef de knopen van T in preorde-volgorde en in postorde-volgorde.

b. Teken de met T corresponderende binaire boom (eerste-kind-rechterbroer-representatie) en leg uit hoe je aan je antwoord komt.

c. Van een *volle* binaire boom B kennen we de knopen in preorde-volgorde, en van elke knoop is bekend of dit een interne knoop is (1) of een blad (0):

$$a\,(1), b\,(1), c\,(0), d\,(1), e\,(1), f\,(0), g\,(0), h\,(0), i\,(1), j\,(0), k\,(1), \ell\,(0), m\,(0)$$

Reconstrueer hieruit de binaire boom B en licht je gebruikte methode toe.

7) Gegeven is de taal

$$L = \{\ w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ begint met een } b \text{ \underline{en} } w \text{ bevat nooit meer dan twee } a\text{'s of meer dan twee } b\text{'s achter elkaar } \}$$

Voorbeelden:
$b \in L$, $babbabb \in L$, $bbababaaba \in L$, $babaaab \notin L$.

a. Geef een deterministische eindige automaat voor L.

b. Geef een beschrijving van de taal $K = \{a,b\}^* - L$, zoals hierboven ook de taal L is gedefinieerd. Geef ook drie verschillende *illustratieve* voorbeelden van woorden uit de taal K ter lengte maximaal vijf.

c. Toon aan dat K regulier is door K uit te drukken in eindige talen met behulp van de operaties vereniging, concatenatie en ster.