Tentamen Fundamentele Informatica 1
dinsdag 13 maart 2018, 14.00 – 17.00 uur

Dit tentamen bestaat uit zeven opgaven, met in totaal twintig onderdelen die elk 0,5 punten waard zijn, behalve 3a, 4a (0,4 punten) en 3c, 4b (0,6 punten).
Geef bij elke opgave een *duidelijke uitleg*. Veel succes!

1) **a.** Laat met behulp van Venn-diagrammen zien dat

$$B \cap ((A \cup B) \cap A^c)^c = A \cap B$$

Teken ten minste twee aparte Venn-diagrammen om duidelijk te maken welk gebied de verzameling links van de = voorstelt, waaronder een waaruit je afleidt wat $(A \cup B) \cap A^c$ is.

b. Gebruik nu de axioma's/regels van de verzamelingenalgebra om bovenstaande gelijkheid te bewijzen. Pas één axioma tegelijk toe en benoem de gebruikte regels.

2) Gegeven is de verzameling $A = \{-5, -4, -3, \ldots, 3, 4, 5\}$.

a. Wanneer heet een relatie $R \subseteq V \times V$ (met V een of andere verzameling) een *partiële ordening*? Leg de genoemde eigenschappen uit.

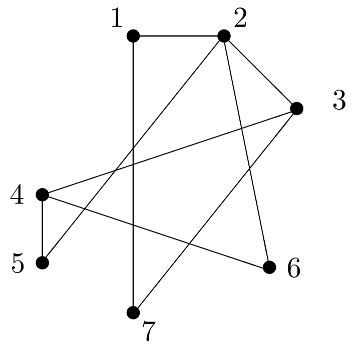
b. Bepaal van de volgende relatie in A of deze reflexief, irreflexief, symmetrisch, anti-symmetrisch en/of transitief is: $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y \leq 0\}$.

c. Van een relatie S in A is bekend dat S een partiële ordening is en bovendien dat $\{(-4, 3), (-2, -5), (1, 3), (2, -4), (3, -2)\} \subseteq S$.
Beredeneer dat $(0, 0) \in S$, $(2, -2) \in S$ en $(-5, 3) \notin S$.

3) **a.** Wanneer noemen we een ongerichte graaf bipartiet?

b. Gegeven een ongerichte graaf G. Bewijs de volgende stelling: als G bipartiet is, dan bevat G geen cykels van oneven lengte.
Hint: geef een bewijs uit het ongerijmde.

c. Beschouw onderstaande graaf G en beantwoord de bijbehorende vragen.



(i) Is G bipartiet? Motiveer je antwoord.
(ii) Heeft G een Eulercircuit? Zo ja, geef er een; zo nee, leg uit waarom niet.
(iii) G heeft geen Hamiltoncykel. Leg uit waarom niet.

4) De rij van Fibonacci wordt gegeven door $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$, met beginwaarden $F_0 = 0$ en $F_1 = 1$.

a. Bereken $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} F_k$ voor $n = 5$.

b. Bewijs met volledige inductie dat $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} F_k = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1$ voor alle $n \geq 1$. Formuleer daarbij duidelijk je inductiehypothese en wat je vervolgens precies moet aantonen.

5) **a.** Teken de vijf binaire bomen met 3 knopen.

b. Geef de recursieve definitie van een binaire boom en leid daaruit af hoeveel binaire bomen er zijn met 4 knopen.

c. Van een binaire boom T worden de knopen in post-ordening als volgt gegeven: $4, 9, 3, 5, 2, 1, 10, 8, 7, 6$.
De symmetrische ordening van de knopen is $2, 9, 4, 5, 3, 6, 1, 7, 10, 8$.
Reconstrueer de binaire boom en teken deze. Leg duidelijk uit wat je doet.

6) Met $\mathcal{P}(V)$ geven we de machtsverzameling van de verzameling V aan.

a. Bepaal $\{1, 2\} \times \mathcal{P}(\{a, b\})$.

b. Laat zien, door een redenering te geven van de vorm "$X \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow \ldots\ldots$", dat voor verzamelingen A en B geldt: $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

c. De verzameling $\mathbb{N} \times \{1, 2, 3\}$ is aftelbaar. Toon dit aan door een aftelling te geven.

d. Laat zien dat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ niet aftelbaar is met behulp van het diagonalisatie-argument van Cantor.

7) **a.** Gegeven is de taal $K =$

$$\{\ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ bevat een even aantal } a\text{'s en elke } a \text{ wordt gevolgd door een } b\ \}$$

Voorbeelden: $\lambda \in K$, $bbbbbb \in K$, $abbbabbb \in K$, $bababaab \notin K$, $babbabbbab \notin K$.

Geef een deterministische eindige automaat voor K.

b. Toon aan dat de taal K regulier is door deze uit te drukken in eindige talen met behulp van de operaties vereniging, concatenatie en ster.

c. De reguliere taal L is als volgt gedefinieerd:

$$L = \{a, b\} \cdot \{a\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{a, b\} \ \cup\ \{a, b\} \cdot \{b\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a, b\}$$

Beschrijf L in woorden, analoog aan de manier waarop in onderdeel **a.** de taal K gedefinieerd is.