Tentamen Fundamentele Informatica 1
maandag 8 januari 2018, 14.00 – 17.00 uur

Dit tentamen bestaat uit zeven opgaven, met in totaal twintig onderdelen die elk 0,5 punten waard zijn, behalve 4a, 7a (0,4 punten) en 4b, 7b (0,6 punten).
Geef bij elke opgave een *duidelijke uitleg*. Veel succes!

1)

a. Laat zien dat $A \setminus B = A \cap B^c$ geldt door een redenering te geven van de vorm "als $x \in \ldots$ dan $\ldots$".

b. Teken duidelijke Venn-diagrammen om aan te tonen dat

$$((B \setminus A^c)^c \cap A) \setminus A^c = A \setminus B$$

c. Als we de gelijkheid uit **b.** herschrijven met behulp van doorsnede en complement in plaats van de operator $\setminus$ krijgen we:

$$((B \cap (A^c)^c)^c \cap A) \cap (A^c)^c = A \cap B^c$$

Gebruik nu de axioma's/regels van de verzamelingenalgebra om deze gelijkheid te bewijzen. Benoem de gebruikte regels.

2) $R = \{(1,0),(3,0),(3,4),(2,4),(4,3),(5,2)\}$ is een relatie in $A = \{0,1,2,3,4,5\}$.

a. Teken de gerichte grafen corresponderend met R, $R^2 = R \circ R$ en $R^3 = R \circ R^2$.

b. Bepaal de transitieve afsluiting $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$. Geef R^+ als verzameling van paren, zoals boven.

c. Dit onderdeel staat los van **a.** en **b.**
Van de relatie S in A is bekend dat $\{(1,0),(2,4),(5,2)\} \subseteq S$ en dat S een *equivalentierelatie* is. Verder is gegeven dat $(3,0) \notin S$.
Beredeneer dat $(4,4) \in S$, $(4,5) \in S$ en $(1,3) \notin S$.

3) Deze opgave gaat over ongerichte grafen en bomen. De onderdelen staan los van elkaar.

a. Teken alle niet-isomorfe samenhangende ongerichte grafen met vier knopen. Het zijn er zes.

b. Bewijs: als we een willekeurige lijn $e = \{u, v\}$ uit een boom G verwijderen is $G - \{e\}$ niet meer samenhangend. *Hint:* geef een bewijs uit het ongerijmde.
Ter herinnering: een *boom* is een ongerichte graaf die *samenhangend* en *acyclisch* (= zonder cykels) is.

c. Van een binaire boom T worden de knopen in post-ordening als volgt gegeven: $2,4,1,3,6,7,9,5,8$.
De symmetrische ordening van de knopen is $4,2,3,1,8,6,9,7,5$.
Reconstrueer de binaire boom en teken deze. Leg duidelijk uit wat je doet.

4) De rij a_n wordt inductief gedefinieerd door $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ en $a_n = 6 \cdot a_{n-1} - 8 \cdot a_{n-2}$ voor alle natuurlijke getallen $n \geq 2$.

a. Bereken de waarde van a_2 en a_3 uit de recurrente betrekking.

b. Bewijs met volledige inductie dat $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 4^{n-1}$ voor alle natuurlijke getallen $n \geq 0$. Formuleer daarbij duidelijk je inductiehypothese.

5) **a.** Wanneer heet een verzameling *aftelbaar*?

b. Laat zien dat $\mathbb{Z}$ aftelbaar is.

c. Bewijs dat $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{ \ (x, y) \mid \ x \in \mathbb{Z}$ en $y \in \mathbb{Z} \ \}$ aftelbaar is. Gebruik dat je al weet uit **b.** dat $\mathbb{Z}$ aftelbaar is.

6) **a.** Bereken x^2, x^3 en x^4 modulo 8 voor $x = 1, 2, \ldots, 7$.

b. Laat zien dat voor *oneven* natuurlijke getallen x geldt dat $x^m \equiv 1$ modulo 8 als m *even* is.

c. Bepaal de rest van $100^{331} + 75^{999} + 43^3$ bij deling door 8.

7) Gegeven is de taal

$K = \{ \ w \in \{0, 1\}^* \mid w$ begint en eindigt met een 0 <u>of</u> w bevat het deelwoord 111 $\}$

Voorbeelden: $011100 \in K$, $01010110 \in K$, $101111010 \in K$, $01010101101 \notin K$.

a. Toon aan dat K regulier is door K uit te drukken in eindige talen met behulp van de operaties vereniging, concatenatie en ster.

b. Geef een deterministische eindige automaat voor K.
Tip: teken eerst het gedeelte van de automaat voor het geval dat het woord met een 1 begint en vervolgens het gedeelte voor het andere geval.

c. De reguliere taal L is als volgt gedefinieerd:

$$L = \{0\} \cdot \{0, 1\} \cdot \{00, 01, 10, 11\}^* \cdot \{0\}$$

Beschrijf L in woorden, ongeveer zoals de taal K.