Fundamentele Informatica 1 **14 maart 2017, 14–17 u.**

Dit tentamen bestaat uit in totaal negentien onderdelen die elk een half punt waard zijn. Met een halve startpunt goed voor een tien. Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) **a.** Laat met een Venn diagram zien dat $A \cap (A \cap B^c)^c = A \cap B$.

b. Vereenvoudig $A \cap (A \cap B^c)^c$ met behulp van de verzamelingenalgebra.
Benoem de gebruikte regels.

c. Geef de duale bewering van $A \cap (A \cap \varnothing)^c = A \cap U$.

2) **a.** Formuleer het principe van inclusie en exclusie voor het tellen van het aantal elementen in de vereniging $A \cup B$.

b. Bepaal het aantal rijtjes van tien nullen of enen, waarbij er precies vijf nullen zijn, of de eerste twee symbolen `11` zijn (of allebei).
Bijvoorbeeld `0000011111`, `1101010101` of `1101010100`.

3) De relatie $X \subseteq \{1,2,3,4\}^2$ wordt gegeven door

$$X = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,4), (3,4)\}$$

a. Teken X als gerichte graaf en als pijldiagram.

b. Is de relatie X reflexief? Symmetrisch? Anti-symmetrisch? Motiveer je antwoorden.

c. Bepaal de transitieve afsluiting van de relatie X.

4) De taal $L \subseteq \{a,b\}^*$ wordt door de volgende regels gedefinieerd:

i. $a \in L$

ii. als x en y strings in L zijn dan ook bxy in L.

a. Laat zien dat $babbbaaabaa \in L$, en $b^{94}a^{95} \in L$.

b. Bewijs met inductie dat voor elke $z \in L$ geldt dat $\#_a(z) = \#_b(z) + 1$.
Hierbij zijn $\#_a(z)$ en $\#_b(z)$ de aantallen letters a en b in z,
bijvoorbeeld $\#_a(abbaabbabb) = 4$ en $\#_b(aa) = 0$.

c. Als b een binaire operator is, en a een constante, dan stellen de strings uit L de pre-orde notaties van binaire bomen voor.
Teken de bomen corresponderend met $b\,a\,b\,b\,b\,a\,a\,a\,b\,a\,a$ en b^5a^6.

5) **a.** Laat zien dat $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aftelbaar is.

Per definitie is een verzameling A aftelbaar als A eindig is, of als er een bijectie $f\colon \mathbb{N} \to A$ bestaat. Een bijectie is zowel injectief 'een-een' als surjectief 'op'.

b. Als er een injectieve $f\colon \mathbb{N} \to A$ bestaat, is A dan aftelbaar?
Zo ja, beredeneer dat dan; zo nee, geef een voorbeeld waarin A niet aftelbaar is.

c. Als er een surjectieve $f\colon \mathbb{N} \to A$ bestaat, is A dan aftelbaar?
Zo ja, beredeneer dat dan; zo nee, geef een voorbeeld waarin A niet aftelbaar is.

6) Deze opgave gaat over ongerichte grafen.

a. Als graaf G samenhangend is, en n knopen heeft, wat kun je dan zeggen over het aantal lijnen van G? (minimaal en maximaal, uitgedrukt in n)

Het *complement* G^c van een graaf $G = (V, E)$ draait alle lijnen en niet-lijnen om, dus $G^c = (V, E^c)$, met $E^c = \{\ \{x, y\} \subseteq V \mid \{x, y\} \notin E, x \neq y\ \}$.

b. Onderstaande twee grafen zijn elk isomorf aan hun eigen complement.
Geef voor beide grafen zo'n isomorfisme tussen G en G^c.

0 3 4 5

4 1

3 2 1 2

c. Neem aan dat G *niet* samenhangend is. Beredeneer dat dan G^c wel samenhangend is.

7)

$$K = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ bevat een oneven aantal } a\text{'s en eindigt op } b\ \}$$

a. Geef een deterministische eindige automaat voor K.

b. Toon aan dat de taal K regulier is, dwz, druk K uit in eindige talen mbv de operaties vereniging, concatenatie en ster ($\cup$, $\cdot$, $*$).