

Dit tentamen bestaat uit in totaal negentien onderdelen die elk een half punt waard zijn. Met een halve startpunt goed voor een tien. Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

- 1)
 - a. Laat met een Venn diagram zien dat $A \cap (A \cap B^c)^c = A \cap B$.
 - b. Vereenvoudig $A \cap (A \cap B^c)^c$ met behulp van de verzamelingenalgebra. Benoem de gebruikte regels.
 - c. Geef de duale bewering van $A \cap (A \cap \emptyset)^c = A \cap U$.

- 2)
 - a. Formuleer het principe van inclusie en exclusie voor het tellen van het aantal elementen in de vereniging $A \cup B$.
 - b. Bepaal het aantal rijtjes van tien nullen of enen, waarbij er precies vijf nullen zijn, of de eerste twee symbolen 11 zijn (of allebei).
Bijvoorbeeld 0000011111, 1101010101 of 1101010100.

- 3) De relatie $X \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$ wordt gegeven door

$$X = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

- a. Teken X als gerichte graaf en als pijldiagram.
 - b. Is de relatie X reflexief? Symmetrisch? Anti-symmetrisch? Motiveer je antwoorden.
 - c. Bepaal de transitieve afsluiting van de relatie X .
-
- 4) De taal $L \subseteq \{a, b\}^*$ wordt door de volgende regels gedefinieerd:
- i. $a \in L$
 - ii. als x en y strings in L zijn dan ook $bx y$ in L .
- a. Laat zien dat $babbbaaaba \in L$, en $b^{94}a^{95} \in L$.
 - b. Bewijs met inductie dat voor elke $z \in L$ geldt dat $\#_a(z) = \#_b(z) + 1$.
Hierbij zijn $\#_a(z)$ en $\#_b(z)$ de aantallen letters a en b in z ,
bijvoorbeeld $\#_a(abbaabbabb) = 4$ en $\#_b(aa) = 0$.
 - c. Als b een binaire operator is, en a een constante, dan stellen de strings uit L de pre-orde notaties van binaire bomen voor.
Teken de bomen corresponderend met $babbbaaaba$ en b^5a^6 .

- 5) a. Laat zien dat $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aftelbaar is.

Per definitie is een verzameling A aftelbaar als A eindig is, of als er een bijectie $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ bestaat. Een bijectie is zowel injectief ‘een-een’ als surjectief ‘op’.

- b. Als er een injectieve $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ bestaat, is A dan aftelbaar?

Zo ja, beredeneer dat dan; zo nee, geef een voorbeeld waarin A niet aftelbaar is.

- c. Als er een surjectieve $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ bestaat, is A dan aftelbaar?

Zo ja, beredeneer dat dan; zo nee, geef een voorbeeld waarin A niet aftelbaar is.

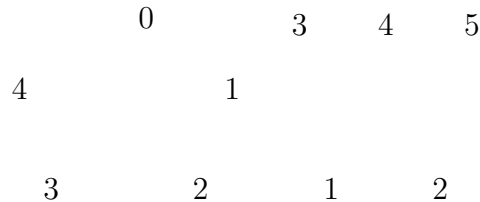
- 6) Deze opgave gaat over ongerichte grafen.

- a. Als graaf G samenhangend is, en n knopen heeft, wat kun je dan zeggen over het aantal lijnen van G ? (minimaal en maximaal, uitgedrukt in n)

Het *complement* G^c van een graaf $G = (V, E)$ draait alle lijnen en niet-lijnen om, dus $G^c = (V, E^c)$, met $E^c = \{ \{x, y\} \subseteq V \mid \{x, y\} \notin E, x \neq y \}$.

- b. Onderstaande twee grafen zijn elk isomorf aan hun eigen complement.

Geef voor beide grafen zo'n isomorfisme tussen G en G^c .



- c. Neem aan dat G *niet* samenhangend is. Beredeneer dat dan G^c wel samenhangend is.

- 7)

$$K = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ bevat een oneven aantal } a\text{'s en eindigt op } b \}$$

- a. Geef een deterministische eindige automaat voor K .
- b. Toon aan dat de taal K regulier is, dwz, druk K uit in eindige talen mbv de operaties vereniging, concatenatie en ster ($\cup, \cdot, *$).