Fundamentele Informatica 1 **9 januari 2017, 14–17 u.**

Dit tentamen bestaat uit in totaal negentien onderdelen die elk een half punt waard zijn. Met een halve startpunt goed voor een tien. Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) **a.** Laat door middel van Venn diagrammen zien dat

$$A \setminus (B \cap C) = (B^c \setminus A^c) \cup (C^c \setminus A^c)$$

Laat éérst zien dat $B^c \setminus A^c = A \setminus B$, en gebruik dat twee keer in de rechter uitdrukking.

b. Bewijs deze gelijkheid ook door de regels van de verzamelingenalgebra te gebruiken. Vervang daartoe eerst elke $X \setminus Y$ door $X \cap Y^c$. Waar een dubbel complement ontstaat, laat je die staan. Vervolgens pas je de juiste regels toe (met de naam van die regel).

2) De relatie R op $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ is gelijk aan

$$\{\ (3,0), (0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,0)\ \}$$

a. Geef de relaties R, R^2 en R^4 weer als gerichte graaf.

b. Bepaal alle even k waarvoor $\mathrm{id}_A \cap R^k \neq \varnothing$.

3) **a.** Wanneer heet een verzameling aftelbaar?

b. Laat zien dat $\mathbb{Q}$ aftelbaar is.

c. Is $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ aftelbaar? En $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$?

4) **a.** Geef een recursieve definitie van symmetrische-ordening voor binaire bomen.

b. Van een binaire boom T zijn de knopen in pre-ordening in alfabetische volgorde: $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$.
De symmetrische ordening van de knopen van T is $C, D, B, A, F, E, I, H, G, J$.
Reconstrueer de boom T (en teken er een plaatje van). Leg uit wat je doet.

c. Als de pre-ordening van een boom net als boven gelijk is aan $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$, kan de symmetrische ordening dan elke willekeurige permutatie van deze letters zijn?

5) We bekijken twee talen.

De taal L wordt gespecificeerd door de volgende regels:

1. $a \in L$.
2. als $x \in L$ dan $xb \in L$.
3. als $x \in L$ en $y \in L$ dan $xya \in L$.

De taal K_{on} bestaat uit alle woorden over $\{a, b\}$ die een oneven aantal a's bevatten.

a. Bewijs met inductie dat $L \subseteq K_{\text{on}}$.

b. Leg uit dat L en K_{on} niet gelijk aan elkaar zijn.

c. Geef een recursieve definitie van K_{on}, met enige uitleg om aan te geven waarom deze definitie wèl K_{on} vastlegt.

6) **a.** Bereken de getallen x^2 modulo 12, voor $x = 1, 2, \ldots, 11$.

b. Als je het goed gedaan hebt, is deze reeks kwadraten modulo 12 symmetrisch (achterstevoren zien we dezelfde reeks). Waarom geldt dat?

c. Bepaal de rest van $9^{71} + 8^{132}$ bij deling door 12.

7) Deze opgave gaat over ongerichte grafen.

Het *complement* van een graaf $G = (V, E)$ draait alle lijnen en niet-lijnen om, dus $G^c = (V, E^c)$, met $E^c = \{\ \{x, y\} \subseteq V \mid \{x, y\} \notin E, x \neq y\ \}$.

Er is precies één graaf met vier knopen die isomorf is aan zijn complement. Welke graaf is dat?

Leg uit waarom er geen graaf met 15 knopen is met deze eigenschap.

8) Gegeven is de taal

$$K = \{\ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ heeft ergens een } a \text{ op een even positie, of eindigt op } b\ \}$$

(de eerste positie van een woord is oneven).

Voorbeelden: $a\underline{a}bba, bba\underline{a}a\underline{b}, abab\underline{b} \in L, \quad \lambda, bbaba \notin L.$

a. Geef een deterministische eindige automaat voor K.

b. Toon aan dat K *regulier* is, maw. druk K uit in eindige talen mbv. de operaties vereniging, concatenatie en ster ($\cup$, $\cdot$, *).