Fundamentele Informatica 1 **8 maart 2016, 14–17 u.**

Dit tentamen bestaat uit in totaal negentien onderdelen die elk een half punt waard zijn. Met een halve startpunt goed voor een tien. Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) De verzamelingsoperatie symmetrisch verschil noteren we met $\oplus$.

a. Voor $n \in \mathbb{N}$ nemen we de verzameling $A_n = \{n, n+1, \ldots, 2n\}$.
Bepaal $A_3 \oplus A_4 \oplus A_5 \oplus A_6$.

b. Bewijs, met behulp van Venn-diagrammen, de distributiviteit van $\cap$ over $\oplus$, dwz.:
$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

c. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat $\cup$ niet distribueert over $\oplus$, dus waarvoor:
$A \cup (B \oplus C) \neq (A \cup B) \oplus (A \cup C)$.

2) De relatie R op $\{1, 2, 3, 4\}$ is gelijk aan $\{ (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 1) \}$.

a. Bepaal de relaties R^2 en $R \circ R^{-1}$; geef uw antwoorden als gerichte graaf.

b. Beredeneer dat relaties R^{100} en R^{101} niet gelijk zijn.

c. Laat nu $R \subseteq A \times A$ een willekeurige binaire relatie zijn.
Beredeneer dat $\mathrm{id}_A \subseteq R \circ R^{-1}$ desdals R totaal is.

3) De reeks a_n wordt gedefinieerd door $a_0 = 1$, $a_1 = 2$
en $a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 2 \cdot a_{n-2}$ voor alle natuurlijke getallen $n \geq 2$.

Bewijs met volledige inductie dat $a_n = 2^n$.

4) Een relatie heet een partiële ordening als zij reflexief, antisymmetrisch en transitief is.

a. Wat betekenen deze drie begrippen?

Het begrip interval kent u van de middelbare school: $[\,a, b\,] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$.

We definiëren relatie $\triangleleft$ tussen intervallen als het tweede interval als het ware in het verlengde ligt van het eerste (overlap toegestaan):

$$[\,a, b\,] \triangleleft [\,c, d\,] \text{ geldt als } [\,a, b\,] \cup [\,c, d\,] = [\,a, d\,].$$

b. Ga elk van de drie eigenschappen van partiële ordening na voor deze relatie $\triangleleft$.

c. Definieer zelf een relatie op intervallen die wél een partiële ordening is (maar niet gelijkheid).

5) $\triangle$ is een binaire bewerking (op gehele getallen).

a. De expressie $4\ 3 \triangle 1\ 2\ 3 \triangle \triangle \triangle 4 \triangle$ is in postorde notatie (omgekeerde Poolse notatie). Teken de bijbehorende boom. Geef de preorde notatie voor de expressie.

b. Beschrijf een functie die het aantal bladeren van een binaire boom bepaalt, door het geven van *basis* $f(\text{blad})$ en *recursie* $f(\text{knoop})$ uitgedrukt in $f(\text{links})$ en $f(\text{rechts})$. Je mag aannemen dat de boom volledig is (elke knoop is ofwel een blad, ofwel heeft beide kinderen, 'links' en 'rechts'.)

6) **a.** Bepaal voor $x = 0, 1, 2, 3, 4$ de waarde van x^2, x^3 en x^4 modulo 5.

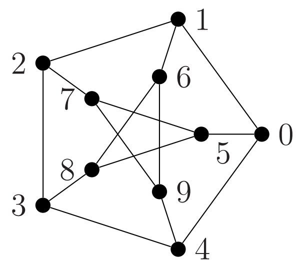
b. Voor welke gehele getallen geldt dat $x^{23} + x^{17} + 2$ deelbaar is door 5? Motiveer je antwoord.

7) Voor alle getallen $0 < k < n$ definiëren we een speciale (ongerichte) graaf.
De Kneser graaf $\mathrm{KG}_{n,k}$ heeft knopen die precies de verzamelingen van k elementen uit $\{1, 2, \ldots, n\}$ zijn. De graaf heeft lijnen tussen knopen die geen element gemeenschappelijk hebben.
Bijvoorbeeld $\{\, \{1, 2, 7\}, \{3, 5, 6\} \,\}$ is een lijn van $\mathrm{KG}_{7,3}$.
Formeel is dus $\mathrm{KG}_{n,k} = (V, E)$, met $V = \{\, X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \mid |X| = k \,\}$ en $E = \{\, \{X, Y\} \mid X \cap Y = \varnothing \,\}$.

a. Teken $\mathrm{KG}_{4,1}$. Hoeveel knopen heeft $\mathrm{KG}_{n,1}$? Hoeveel lijnen? (Uitgedrukt in een formule met n.)

b. Teken $\mathrm{KG}_{5,2}$.

Onderstaande graaf is de Petersen-graaf.



c. De hierboven beschreven graaf $\mathrm{KG}_{5,2}$ heeft dezelfde structuur als de Petersen-graaf. Geef een isomorfisme tussen beide grafen.

8) Gegeven is de taal

$$K = \{\, w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ begint en eindigt met een } a\text{, en } |w| \text{ is even} \,\}$$

a. Geef een deterministische eindige automaat voor K.

b. Toon aan dat K *regulier* is, maw. druk K uit in eindige talen mbv. de operaties vereniging, concatenatie en ster ($\cup$, $\cdot$, *).