Dit tentamen bestaat uit zeven opgaven, met totaal twintig onderdelen die elk een half punt waard zijn.
Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) We bekijken verzamelingen in een universum U.

a. Vereenvoudig $(A \cup B^c) \cup (B \cap A^c)$, gebruikmakend van rekenregels uit de verzamelingenalgebra. Benoem de gebruikte regels.

b. Formuleer het *principe van inclusie en exclusie* voor het tellen van het aantal elementen in een vereniging $V \cup W$.

c. Bereken het aantal getallen uit $U = \{1, 2, \ldots, 6000\}$ dat deelbaar is door 2, 3, of 6.
Let op: het antwoord is dus één getal, niet drie!

2) **a.** Wanneer heet een verzameling *aftelbaar*?

b. Geef twee aftelbare verzamelingen V en W zodat de machtsverzameling $\mathcal{P}(V)$ aftelbaar is en $\mathcal{P}(W)$ niet aftelbaar is. Geef uitleg.

c. $\mathcal{N}$ is de verzameling van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ met 3 elementen,
zoals $\{10, 0, 1024\}$, $\{0, 1, 2\}$, of $\{100, 1, 10000\}$.
Is $\mathcal{N}$ aftelbaar?

3) **a.** Een relatie heet een equivalentierelatie als zij reflexief, symmetrisch en transitief is.
Wat betekenen deze begrippen gegeven een relatie R op een verzameling A?

Bekijk verzameling $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ en relatie $Q = \{\ (a, b), (e, c), (f, c)\ \}$ op A.

b. Van een equivalentierelatie R op A is bekend dat $Q \subseteq R$ en dat $(d, b) \notin R$.
Geef Q als pijldiagram en gerichte graaf en beredeneer dat $(e, f) \in R$ en dat $(a, d) \notin R$.

c. Geef de equivalentieklassen van alle mogelijke equivalentierelaties R op A met de eigenschappen dat $Q \subseteq R$ en dat $(d, b) \notin R$.

4) De reeks a_n wordt gedefinieerd door $a_0 = 1$, $a_1 = 2$
en $a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 2 \cdot a_{n-2}$ voor alle natuurlijke getallen $n \geq 2$.

Bewijs met volledige inductie dat $a_n = 2^n$.

5) $\clubsuit$ en $\diamondsuit$ zijn hier binaire bewerkingen (op gehele getallen).

a. De expressie $\diamondsuit \clubsuit \diamondsuit\ 1\ 2\ 5 \diamondsuit\ 8 \clubsuit\ 1\ 3$ is in preorde notatie (Poolse notatie).
Teken de bijbehorende boom.

b. Nummer de knopen van uw boom volgens postordening.
Wandel langs de knopen van de boom (in postorde) en bereken de waarde bij elke knoop. Hierbij zijn $\clubsuit$ en $\diamondsuit$ respectievelijk de bewerking minimum en maximum.

c. Van binaire boom T zijn de knopen in pre-orde $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$ en in symmetrische ordening $D, C, B, F, E, A, G, I, H, K$.
Reconstrueer boom T, dus teken er een plaatje van. *hint*: wat is de wortel?

d. In onderdeel **a)** is de boom uit de pre-orde notatie af te leiden, terwijl in **c)** zowel de pre-orde als de symmetrische ordening nodig zijn.
Wat is het essentiële verschil?

6) Met $\mathbb{Z}_8$ bedoelen we de verzameling restklassen modulo 8.

a. Bepaal x^2, x^3 en x^4 voor elke $x \in \mathbb{Z}_8$.

b. Bewijs dat $n^4 - 1$ deelbaar is door 8 als n niet deelbaar is door 2.

c. Bepaal de rest van $100^{100} + 77^{77}$ bij deling door 8.

7) Gegeven is

$$K = \{\ w \in \{a, b\}^* \mid \text{als } w \text{ eindigt op een } b \text{ dan begint } w \text{ met een } b\ \}$$

a. Zijn de volgende woorden element van K?
λ, aaa, aab, baa, bab.

b. Geef een deterministische eindige automaat voor K.

c. Toon aan dat het complement van K *regulier* is, maw. druk de taal K^c uit in eindige talen mbv. de operaties vereniging, concatenatie en ster $(\cup, \cdot, {}^*)$.