Fundamentele Informatica 1 **9 maart 2015, 10–13 u.**

Dit tentamen bestaat uit in totaal twintig onderdelen die elk een half punt waard zijn.
Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) **a.** Schrijf het verschil $A \backslash B$ met behulp van doorsnede en complement.

b. Laat met behulp van Venn diagrammen zien dat $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
Geef duidelijk aan wat al uw arceringen voorstellen.

c. Laat met behulp van de verzamelingenalgebra zien dat $(A \cup B) \backslash A = B \backslash A$.
Herschrijf eerst de operator $\backslash$ als hierboven. Benoem de gebruikte regels.

2) Gegeven is de relatie $R = \{(a, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\}$ op $\{a, b, c, d\}$.

a. Teken R als gerichte graaf en als pijldiagram.

b. Bepaal $R^2 = R \circ R$ en $R^3 = R^2 \circ R$.

c. Bepaal de transitieve afsluiting $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$.

3) Een binaire relatie R op A heet een partiële ordening als zij *reflexief*, *antisymmetrisch* en *transitief* is.

a. Wat betekenen deze drie begrippen?

We bekijken de relatie $\sqsubset$ op $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gedefinieerd door: $(a, b) \sqsubset (c, d)$ als $a \leq c$ en $b \geq d$.

b. Ga de drie eigenschappen voor partiële ordening na voor de relatie $\sqsubset$.

4) $\oplus$ en $\owedge$ zijn hier binaire bewerkingen (op gehele getallen).

a. De expressie $4\ 3 \oplus 1\ 2\ 3 \oplus \owedge \owedge 4 \oplus$ is in postorde notatie (omgekeerde Poolse notatie).
Teken de bijbehorende boom.

b. Bereken van elk van de knopen in de boom de bijbehorende waarde, als we voor $\oplus$ en $\owedge$ respectievelijk de bewerkingen 'optellen' en 'maximum nemen' kiezen.

c. Beschrijf een functie die het aantal bladeren van een binaire boom bepaalt, door het geven van *basis* f(blad) en *recursie* f(knoop) uitgedrukt in f(links) en f(rechts).
Je mag aannemen dat de boom volledig is (elke knoop is ofwel een blad, ofwel heeft beide kinderen.)

5) **a.** Schrijf als sommatie ($\sum \ldots$) en bereken de uitkomst van $-7-4-1+2\ldots+74+77$.

b. We definiëren de rij a_n ($n \in \mathbb{N}$) door middel van de recurrentie $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, met beginwaarden $a_0 = 2$ en $a_1 = 1$.
Bewijs met inductie dat $a_n = (-1)^n + 2^n$.

6) **a.** Bepaal x^2 modulo 12 voor elke $x \in \{0, 1, 2\ldots, 11\}$.

b. Bepaal de rest van $17^{331} + 4^{122}$ bij deling door 12.

7) Deze opgave gaat over ongerichte grafen.

a. Als G een samenhangende graaf is met n knopen, wat is dan het minimale en het maximale aantal lijnen van G?

b. Een lijn e van een samenhangende graaf G heet een *brug* als $G - e$ niet langer samenhangend is.
Beredeneer: een lijn e is een brug desdals e niet op een cykel van G ligt.

8) **a.** Geef een deterministische eindige automaat voor de taal

$$K = \{\ w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ heeft een suffix } abb\ \}$$

b. Doe dit ook voor de taal $\mathrm{mir}(K)$.

c. Toon aan dat K *regulier* is, maw. druk K uit in eindige talen met behulp van de operaties vereniging, concatenatie en ster ($\cup$, $\cdot$, *).
Doe dit ook voor het *complement* van K ten opzichte van $\{a,b\}^*$.