Fundamentele Informatica 1 **19 december 2014, 14–17 u.**

Dit tentamen bestaat uit in totaal negentien onderdelen die elk een half punt waard zijn. Met een halve startpunt goed voor een tien.
Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) **a.** Laat met behulp van een Venn-diagram zien dat $(A \cup B^c) \cup (B \cap A^c) = U$ voor alle $A, B \subseteq U$.

b. Toon dezelfde gelijkheid nogmaals aan, nu met behulp van de verzamelingen-algebra. Benoem de gebruikte regels.

2) **a.** Geef de relatie $R = \{ (a,b), (b,c), (b,d), (c,d), (d,a) \}$ als (gerichte) graaf en matrix.

b. Bepaal de relaties R^2, R^3 en R^4 weergegeven als graaf.
Welke van deze grafen zijn sterk samenhangend?

c. Geef een relatie Q (op een zelfgekozen domein) waarvoor geldt dat alle ‘machten’ Q^n, $n \geq 1$, verschillend zijn.

3) **a.** Een relatie heet een partiële ordening als zij *reflexief*, *antisymmetrisch* en *transitief* is. Wat betekenen deze drie begrippen?

We definiëren een relatie op $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ door: $(a,b) \angle (c,d)$ als $a \leq c$ en $d \leq b$.

b. Ga de drie eigenschappen voor partiële ordening na voor de relatie $\angle$.

4) **a.** Hoeveel elementen bevat $\mathcal{P}(\{a,b,c\} \times \{1,2\})$?
Hoe noemen we die elementen ook wel?

b. Wanneer heet een verzameling aftelbaar?

c. Laat zien dat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ niet aftelbaar is, met behulp van het diagonalisatie-argument van Cantor.

5) **a.** Van binaire boom T zijn de knopen in pre-orde $A, B, D, E, G, K, C, F, H, I$ en in symmetrische ordening $D, B, K, G, E, A, C, H, F, I$.
Reconstrueer boom T, dus teken er een plaatje van. *hint*: wat is de wortel?

b. Met pre-orde en post-orde samen kunnen we *niet* altijd de boom reconstrueren! Laat dit zien door verschillende bomen te tekenen die pre-orde A, B, C, D en post-orde D, C, B, A.

6) Na wat proberen vermoedt de docent dat $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even} \\ -(n+1)/2 & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$.

a. Help uw docent. Controleer de gelijkheid voor $n = 3$ en $n = 4$.

b. Bewijs de gelijkheid *met inductie*, natuurlijk moet je daarbij de even en oneven gevallen apart behandelen.

7) Deze opgave gaat over ongerichte grafen.

a. Wanneer is een graaf bipartiet ? Teken de graaf $K_{3,2}$ (zónder kruisende lijnen).

b. Leg uit dat elke boom bipartiet is.

c. Geef een graaf met vijf knopen die Eulers is, maar niet bipartiet.
Teken ook een graaf met vijf knopen die bipartiet is, maar niet Eulers.

8) Hier is K de taal van alle woorden (over $\{a, b\}$) die beginnen met een a en geen deelwoord aba of bab hebben.

Woorden *niet* in K zijn bijvoorbeeld $\underline{b}aaa$, en $aaabb\underline{bab}b$.

a. Geef een eindige automaat voor de taal K.

b. Laat zien dat het complement $\{a, b\}^* - K$ regulier is, dat wil zeggen druk die taal uit in eindige talen met behulp van de operaties vereniging, concatenatie en ster.