Dit tentamen bestaat uit in totaal twintig onderdelen die elk een half punt waard zijn.
Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) **a.** Laat zien dat voor verzamelingen A en B geldt dat $(A \cup B) \cap A^c = (A \cup B^c)^c$, door twee mooie Venn-diagrammen te tekenen met uitleg.

b. Geef de duale bewering van $(A \cup \varnothing)^c = A^c \cap U$.

2) Gegeven is de matrix

$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a. Teken M als gerichte graaf, maar óók als pijldiagram.

b. Aan welke voorwaarde voldoet de matrix van een ongerichte graaf?
Hoe zien we aan de matrix dat de bijbehorende relatie reflexief dan wel symmetrisch is?

c. Laat R de relatie zijn die door M wordt weergegeven. Bepaal R^{100}.

3) **a.** Wanneer heet een verzameling *aftelbaar*?

b. Laat zien dat $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ aftelbaar is.

4) Gegeven is de recurrente betrekking $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$ (voor $n \geq 2$) met beginwaarden $x_0 = 0$ en $x_1 = 4$.

a. Bewijs, met inductie naar n, dat $x_n = 3^n + (-1)^{n+1}$.

b. Bereken $\sum_{k=0}^{n} x_k$ voor $n = 0, 1, 2, 3$.

c. Schrijf $\sum_{k=0}^{n} x_k$ als functie van n *zonder* sommatie.
(Gebruik onderdeel **a.** en de formules voor reeksen om een gesloten uitdrukking te vinden; in mijn eigen antwoord moest ik even en oneven n apart nemen.)

5) **a.** Bepaal voor $x = 0, 1, 2, 3, 4$ de waarde van x^2, x^3 en x^4 modulo 5.

b. Voor welke gehele getallen geldt dat $x^{23} + x^{17} + 2$ deelbaar is door 5? Motiveer je antwoord.

6) Een relatie heet een partiële ordening als zij reflexief, antisymmetrisch en transitief is.

a. Wat betekenen deze begrippen?

Het begrip interval kent u van de middelbare school: $[\,a, b\,] = \{\ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\ \}$.

We definiëren relatie $\lhd$ tussen intervallen als het tweede interval als het ware in het verlengde ligt van het eerste (overlap toegestaan):

$$[\,a, b\,] \lhd [\,c, d\,] \text{ geldt als } [\,a, b\,] \cup [\,c, d\,] = [\,a, d\,].$$

b. Ga elk van de drie eigenschappen van partiële ordening na voor deze relatie $\lhd$.

c. Definieer een partiële ordening op intervallen (maar niet gelijkheid).

7) Opgave over ongerichte grafen.

a. Geef drie eigenschappen voor een graaf met n knopen, waarvan elk tweetal het begrip boom karakteriseert.

b. Heeft elke boom een wortel?

8) Gegeven zijn de talen

$$K = \{\ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ begint met een } a\ \} \qquad \text{en}$$

$$L = \{\ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ heeft even lengte}\ \}\,.$$

De taal T is gelijk aan

$$\{\ w \in \{a, b\}^* \mid \text{als } w \text{ met een } a \text{ begint, dan heeft } w \text{ even lengte}\ \}.$$

a. Druk T uit in K en L, waarbij je alleen gebruik mag maken van de Boolese operaties vereniging, doorsnede en complement ($\cup$, $\cap$, ^{c}).

b. Geef deterministische eindige automaat voor T. (Wordt λ geaccepteerd?)

c. Geef een reguliere expressie voor T, maw. druk de taal uit in eindige talen mbv. de operaties vereniging, concatenatie en ster ($\cup$, $\cdot$, *).