Fundamentele Informatica 1 **20 december 2013, 14–17 u.**

Dit tentamen bestaat uit in totaal twintig onderdelen die elk een half punt waard zijn.
Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) **a.** Laat met behulp van Venn-diagrammen zien dat $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

b. Laat met behulp van de verzamelingenalgebra zien dat $(A \cup B) \cap A^c = (B^c \cup A)^c$.

2) Beschouw het universum $\mathcal{U}$ dat bestaat uit alle relaties op $\{a, b, c, d\}$.

a. De verzameling $\mathcal{T}$ bestaat uit alle transitieve relaties op $\{a, b, c, d\}$, de verzameling $\mathcal{S}$ uit alle symmetrische relaties op $\{a, b, c, d\}$. Teken een Venn-diagram met $\mathcal{T}$ en $\mathcal{S}$ en geef (zo mogelijk) elk gebied een element dat tot dat gebied behoort.

b. Hoeveel elementen bevat dat universum $\mathcal{U}$?

3) **a.** Teken de relatie $R = \{\ (1,2), (1,3), (2,1), (3,2), (3,4)\ \}$ als (gerichte) graaf en als pijldiagram (tussen twee verzamelingen).

b. Bepaal voor *alle* $n \geq 1$ de verzameling $A_n = \{\ x \in \{1, 2, 3, 4\} \mid xR^n4\ \}$.
(Gelukkig zit daar regelmaat in.)

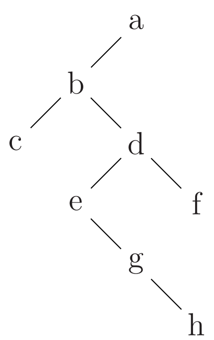
4) **a.** Wanneer heet een verzameling *aftelbaar*?

b. Laat zien dat $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aftelbaar is.

c. Wat is de verzameling $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}^k$?

5) **a.** Laat A, B binaire operatoren zijn, en $1, 2, \ldots$ constanten (namen van bladeren).
De boom T wordt gegeven door de preorde notatie $B\,A\,1\,2\,B\,A\,3\,4\,B\,5\,A\,6\,7$.
Teken T.

b. Onderstaande binaire boom is de linker-kind-rechter-broer representatie van een (geordende) boom P. Teken P.



c. In een binaire boom kunnen er knopen zijn die slechts één kind hebben (links dan wel rechts). Is het dan mogelijk om de boom zonder haakjes te noteren?

6) **a.** Geef een gesloten formule (uitgedrukt in n) voor $\sum_{k=0}^{n}(\sum_{j=0}^{k} 1)$.
Aanwijzing: wat is de uitdrukking tussen haakjes (uitgedrukt in k)?

b. Bewijs *met inductie* dat $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$, als $r \neq 1$.

7) Deze opgave gaat over ongerichte grafen.

a. Wanneer is een graaf bipartiet ? Teken de graaf $K_{3,2}$.

b. Stel G is een bipartiete graaf. Beredeneer dat G alleen cykels van even lengte heeft.

c. Laat $V_n = \{0,1\}^n$ de verzameling woorden over $\{0,1\}$ zijn met (vastgekozen) lengte $n \geq 1$. Neem V_n als verzameling knopen, en verbind knoop x en y door een lijn als woorden x en y precies één symbool verschillen. Beredeneer dat de graaf die ontstaat bipartiet is (ongeacht de waarde n).

Opm. Voor $n = 3$ is er bijvoorbeeld een lijn tussen $x = 001$ en $y = 011$. Er ontstaat een kubus.

8) K is de taal van alle woorden (over $\{a,b\}$) met precies één voorkomen van deelwoord ab, dus $\underline{ab}a \in K$, maar $a\underline{ab}a\underline{ab} \notin K$.

a. Geef een deterministische eindige automaat voor de taal $\{a,b\}^* - K$.

b. Leg uit dat *niet* geldt dat K^2 de taal is van alle woorden (over $\{a,b\}$) met precies twee voorkomens van ab.

c. Laat zien dat $\{a,b\}^* - K$ regulier is, dat wil zeggen druk K uit in eindige talen met behulp van de operaties vereniging, concatenatie en ster.