Dit tentamen bestaat uit zeven opgaven. In totaal zijn er 19 onderdelen die elk evenveel waard zijn, behalve het laatste onderdeel 7b dat dubbel telt. Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) **a.** Gebruik de regels van de verzamelingenalgebra om te laten zien dat in het algemeen $(V \cap W) \cap (V \cup W) = V \cap W$. Benoem de gebruikte regels.

Met $\mathcal{P}(V)$ geven we de machtsverzameling van de verzameling V aan.

b. Laat $V = \{\ \{\varnothing\}, u, v\ \}$ het universum zijn.
Geldt $\varnothing \in \mathcal{P}(V)$? Geldt $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(V)$? Geldt $\{\{\varnothing\}\} \in \mathcal{P}(V)$?
Geldt $\varnothing \subseteq \mathcal{P}(V)$? Geldt $\{\varnothing\} \subseteq \mathcal{P}(V)$? Geldt $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \mathcal{P}(V)$?
Vergeet de uitleg niet.

2) Voor de zekerheid geven we een aantal bekende definities voor relaties.

Als $R \subseteq U \times V$ en $S \subseteq V \times W$ (binaire) relaties zijn, dan definiëren we

– de *inverse* van R als $R^{-1} = \{\ (y, x) \mid xRy\ \}$

– de *samenstelling* van R en S als

$$R \circ S = \{\ (x, z) \in U \times W \mid xRy \text{ en } ySz \text{ voor een } y \in V\ \}.$$

nb. soms wordt de notatie ; gebruikt.

– R is *functioneel* als uit xRy en xRz volgt dat $y = z$.

a. Gegeven is de matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teken M als gerichte graaf, met genummerde knopen 1,2,3,4.

b. Geef de matrix behorend bij de relatie $M \circ M$, en bij de relatie $M^{-1} \circ M$.
Hierbij zijn $^{-1}$ en $\circ$ natuurlijk de operaties op relaties die we hierboven gaven, niet te verwarren met matrix-operaties die u misschien elders heeft geleerd.

c. Hoe zien we aan een willekeurige matrix dat de bijbehorende graaf ongericht is?
Dat de bijbehorende (multi-)graaf geen lussen heeft?
Dat de bijbehorende relatie functioneel is?

3) $\oplus$ en $\ominus$ zijn hier binaire bewerkingen (op gehele getallen).

a. De expressie $4\ 3 \oplus 1\ 2\ 3 \oplus \ominus \ominus 4 \oplus$ is in postorde notatie (omgekeerde Poolse notatie). Teken de bijbehorende boom.

b. Bereken van elk van de operatoren in de expressie de bijbehorende waarde. Hierbij zijn $\oplus$ en $\ominus$ respectievelijk de bewerkingen 'optellen' en 'maximum nemen'.

c. Beschrijf een functie die het aantal bladeren van een binaire boom bepaalt, door het geven van *basis* f(blad) en *recursie* f(knoop) uitgedrukt in f(links) en f(rechts).
Je mag aannemen dat de boom volledig is (elke knoop is ofwel een blad, ofwel heeft beide kinderen.)

4) We definieren *toegestane reeksen* als woorden over $\{a, b\}$:
i. λ en b zijn toegestaan.
ii. als x toegestaan is, dan zijn ook xa en xab dat,
iii. anders dan door (i) en (ii) gedefinieerd zijn geen reeksen toegestaan.

a. Laat zien dat toegestane reeksen geen subwoord bb hebben.

b. Omgekeerd, laat zien dat elk woord x over $\{a, b\}$ zonder subwoord bb een toegestane reeks is.
Hint: gebruik inductie naar het aantal a's in x (maar ook andere methoden kunnen de docent overtuigen).

c. Is de concatenatie van twee toegestane reeksen weer altijd toegestaan? Leg uit.

5) Een restklasse $x(\text{mod } 7)$ in $\mathbb{Z}_7$ geven we aan met $\bar{x}$.

a. Bepaal $\bar{x}^3$ en $\bar{x}^6$ voor elke $\bar{x} \in \mathbb{Z}_7$.

b. Bewijs dat $x^6 - 1$ deelbaar is door 7 als x niet deelbaar is door 7.

c. Bepaal de rest van $100^{100} + 70^{70}$ bij deling door 7.

6) **a.** Wanneer heet een relatie een equivalentierelatie?

Beschouw de verzameling $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Gegeven is de relatie $Q = \{\ (0, 1), (2, 4), (5, 2)\ \}$ op A.

b. Van de equivalentierelatie R op A is bekend dat $Q \subseteq R$ en dat $(3, 1) \notin R$.
Beredeneer dat $(4, 5) \in R$ en dat $(0, 3) \notin R$.

c. Geef de equivalentieklassen van alle mogelijke equivalentierelaties S op A met de eigenschappen dat $Q \subseteq S$ en dat $(3, 1) \notin S$.

7) Gegeven zijn de talen

$$K = \{\ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ eindigt op een } a\ \} \qquad \text{en}$$

$$L = \{\ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ heeft een even aantal } b\text{'s}\ \}$$

a. Teken een Venn diagram van $\{a, b\}^*$ met daarin K en L. Schrijf in elk van de vier gebieden een woord van minimale lengte (maar ongelijk aan λ) uit dat gebied.
Waar bevindt zich λ?

b. Geef één eindige automaat, waarmee door twee verschillende verzamelingen eindtoestanden te kiezen zowel $K \cup L$ als $K \cap L$ herkend kan worden. Geef natuurlijk ook de twee verzamelingen eindtoestanden.