Fundamentele Informatica 1 **18 maart 2004, 14–17 u.**

Dit tentamen bestaat uit zeven opgaven, die elk 1.5 punt waard zijn, behalve opgave 4 die voor 1.0 punt meetelt. Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) Met $\mathcal{P}(V)$ geven we de machtsverzameling van de verzameling V aan.

a. Beredeneer: als V n elementen heeft, dan heeft $\mathcal{P}(V)$ 2^n elementen.

b. Geldt $\varnothing \in \mathcal{P}(V)$? Geldt $\varnothing \subseteq \mathcal{P}(V)$? Geldt $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(V)$? Geldt $\{\varnothing\} \subseteq \mathcal{P}(V)$?
Geef steeds aan of de bewering geldt voor élke V, voor geen enkele V, of dat dit van V afhangt.

c. Als $\mathcal{P}(U) = \mathcal{P}(V)$ voor verzamelingen U en V, geldt dan $U = V$?
Zo ja, bewijs dit. Zo nee, geef dan een voorbeeld waaruit dit blijkt.

2) We breiden een aantal definities gegeven voor functies (in het OU-boek) uit tot relaties.
Als $R \subseteq U \times V$ en $S \subseteq V \times W$ (binaire) relaties zijn, dan definiëren we
– de *inverse* van R als $R^{-1} = \{ \ (y, x) \mid xRy \ \}$
– de *samenstelling* van R en S als

$$R\,;S = \{ \ (x, z) \in U \times W \mid xRy \text{ en } ySz \text{ voor een } y \in V \ \}.$$

nb. soms wordt ook de notatie $R \circ S$ gebruikt.
– R is *injectief* als uit xRy en zRy volgt dat $x = z$.

a. Gegeven is nu de concrete relatie X op $A = \{0, 1, \ldots, 5\}$ als

$$X = \{ \ (0, 4), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 2), (4, 5) \ \}$$

Bepaal $X^2 = X\,;X$ en $X\,;X^{-1}$.

Neem aan dat U en V eindig zijn, $R \subseteq U \times V$ als boven.

b. Hoe herkennen we aan de gerichte graaf die R representeert, dat R *injectief* is?
(in graaf-terminologie). Wat weten we dan van de samenstelling van R en zijn inverse?

c. Hoe herkennen we aan de gerichte graaf die R representeert, dat R *transitief* is?
(in graaf-terminologie). Wat weten we dan van de samenstelling van R met zichzelf?

3) **a.** Wanneer heet een verzameling *aftelbaar* ?

b. Neem $\Sigma = \{ \ a, b \ \}$. Beredeneer dat Σ^* aftelbaar is.

c. Bewijs dat voor elke verzameling V geldt:
er is geen surjectieve afbeelding van V op $\mathcal{P}(V)$.

4) De verzameling Blurps is de kleinste verzameling strings over $\{ \ \Delta, \Diamond \ \}$ zodat:
1. Δ is een Blurps.
2. Als x een Blurps is, dan zijn ook $x\Delta\Delta$ en $\Diamond xx \Diamond$ Blurps-en.
3. Als x en y Blurps-en zijn, dan is ook $x\Delta y$ een Blurps.

Laat zien dat alle elementen van Blurps een oneven aantal driehoekjes Δ hebben of tenminste één ruit $\Diamond$ bevatten.

5) **a.** Een relatie heet een equivalentierelatie als zij reflexief, symmetrisch en transitief is. Wat betekenen die drie begrippen?

$\mathbb{N}^+$ is de verzameling positieve gehele getallen.
Definieer de relatie $\sim$ op $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ door $(a, b) \sim (c, d)$ als $ad = bc$.

b. Laat zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

c. Deze equivalentierelatie is welbekend. Hoe?

6) **a.** Op welke dag valt 18 maart 2016?
(Vandaag is donderdag; gebruik het woord 'modulo' in uw antwoord.)

b. Voor alle gehelen x, y, z geldt: als $x \equiv y \mod m$, dan $x^z \equiv y^z \mod m$.
Als dit waar is, beredeneer dan waarom, geef anders een tegenvoorbeeld.

c. Voor alle gehelen x, y, z geldt: als $x \equiv y \mod m$, dan $z^x \equiv z^y \mod m$.
Als dit waar is, beredeneer dan waarom, geef anders een tegenvoorbeeld.

7) We bestuderen de taal $K \subseteq \{a, b\}^*$ bestaande uit alle woorden w met de eigenschap
– w bevat (tenminste) twee b's én eindigt op een b,
oftewel (in andere woorden)
– de laatste letter van w is b en w bevat nog tenminste een andere b.

a. Geef een deterministische eindige automaat voor K.

b. Toon aan dat K *regulier* is, maw. druk K uit in eindige talen mbv. de bewerkingen vereniging, concatenatie en ster ($\cup$, $\cdot$, *).