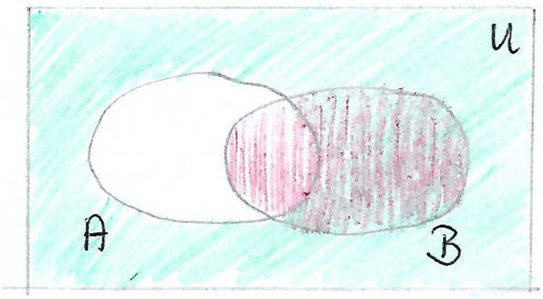
1 a.



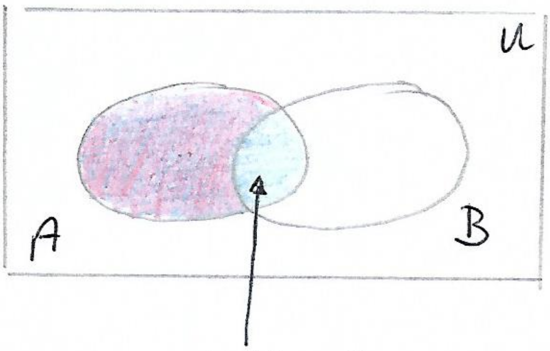
A^c

B

$A^c \cup B$: alles wat en/of gekleurd is.

$\Downarrow$

$(A^c \cup B)^c$: witte gebied

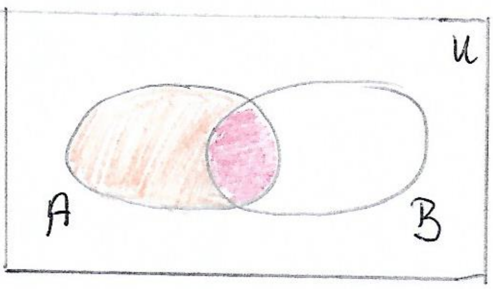


gedeelte alleen is $A \cap B$

$(A^c \cup B)^c$

A

$A \cap (A^c \cup B)^c$



$A \cap (A^c \cup B)^c$

$A \cap B$

$(A \cap (A^c \cup B)^c) \cup (A \cap B)$:

alles wat of gekleurd is $= A$

b. $(A \cap (A^c \cup B)^c) \cup (A \cap B) =$ de Morgan

$(A \cap ((A^c)^c \cap B^c)) \cup (A \cap B) =$ dubbel complement

$(A \cap (A \cap B^c)) \cup (A \cap B) =$ associativiteit

$((A \cap A) \cap B^c) \cup (A \cap B) =$ idempotentie

$(A \cap B^c) \cup (A \cap B) =$ distributiviteit

$(A \cap (B^c \cup B)) =$

$(A \cap (B \cup B^c))$ = ↓ commutativiteit

$A \cap U$ = ↓ complement

A ↓ eenelement (identiteit)

q.e.d.

2 a. $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ bevat $2^3 = 8$ elementen, namelijk alle deelverzamelingen van $\{1,2,3\}$.

$\{a,b\} \times \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ bevat dan $2 * 8 = 16$ elementen (geordende paren). Voorbeelden: $(a, \emptyset)$, $(a, \{2\})$, $(b, \{1,3\})$, $(b, \emptyset)$, $(b, \{1,2,3\})$, $(b, \{3\})$, $(a, \{2,3\})$, etc.

b. Bewijs: neem een willekeurige $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, dan $X \in \mathcal{P}(A)$ of $X \in \mathcal{P}(B)$ (of beide; volgt uit de definitie van $\cup$) $\Rightarrow$ $X \subseteq A$ of $X \subseteq B$ (of beide; volgt uit de definitie van machtsverzameling) $\Rightarrow X \subseteq A \cup B \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. q.e.d.

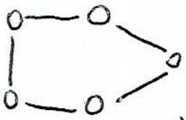
c. I.h.a.: $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$

Simpel voorbeeld: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$ $\Big]$ $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$

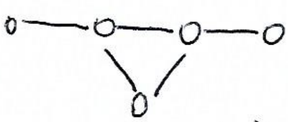
$A \cup B = \{1,2\}$

$\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \neq \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$

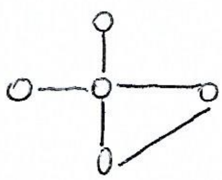
3 a. Merk op: 5 knopen, 5 takken, samenhangend $\Rightarrow$ graaf moet cykel bevatten.



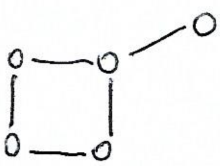
(1)



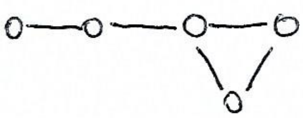
(2)



(3)



(4)

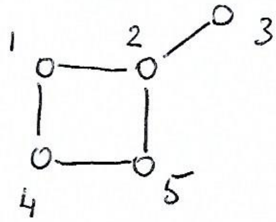


(5)

3 b. (1), (2), (3) en (5) zijn <u>niet</u> bipartiet, want ze hebben alle een cykel van oneven lengte.

- vervolg 3b.

(4) is wel bipartiet:



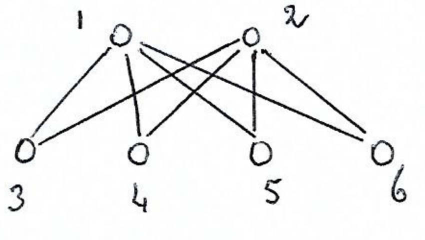
Opsplitsing van de knopen in $V_1 = \{2, 4\}$ en $V_2 = \{1, 3, 5\}$
Nu loopt elke lijn tussen een knoop uit V_1 en een knoop uit V_2.

c. Een Eulercircuit is een gesloten pad dat elke lijn van de graaf precies één keer bevat.

Bewijs: laat C een Eulercircuit zijn en v een knoop van G. Volg nu het Eulercircuit vanuit v (dat uiteindelijk ook weer in v eindigt). Voor elke knoop w op C geldt: bij iedere passage kom je binnen via de ene lijn en ga je eruit via een andere, nog niet eerder bewandelde lijn. Elke passage komt zo overeen met 2 nieuwe lijnen, en dus een bijdrage +2 aan de graad van w. Alle lijnen incident met w worden belopen (en ook maar 1x), dus de graad van w is even. Hetzelfde geldt ook voor v: je begint en eindigt er (+2) en elke tussenliggende passage (via telkens nieuwe lijnen) levert bijdrage +2.

Gevolg: iedere knoop van G moet even graad hebben.

d. $K_{2,4}$ heeft een Eulercircuit, bijvoorbeeld:



1, 3, 2, 4, 1, 5, 2, 6, 1

K_6: volledige graaf met 6 knopen, dus elke knoop heeft lijnen naar alle andere knopen en heeft dus graad 5. Dit is oneven, dus volgens de stelling uit c. heeft K_6 geen Eulercircuit.

4 a. A en B zijn beide aftelbaar; bijv.

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	...
B	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	....

(dus $i \to 3^i$)

Volgens een stelling van het college is $A \cup B$ dan ook aftelbaar; een aftelling kun je maken door om en om elementen van A en B te nemen,

waarbij dubbele worden overgeslagen.
In dit geval geeft dit de volgende bijectie:

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	.....
$A \cup B$	1	2^1	3^1	2^2	3^2	2^3	3^3	.....

In formulevorm:
$$i \longrightarrow \begin{cases} 3^{i/2} & \text{als } i \text{ even} \\ 2^{(i+1)/2} & \text{als } i \text{ oneven.} \end{cases}$$

4b. Stel dat $\mathbb{R} \setminus A$ wel aftelbaar is. Volgens de in a. genoemde stelling zou dan $\underbrace{\mathbb{R} \setminus A \cup A}_{= \mathbb{R}}$ ook aftelbaar zijn.
Dit is in tegenspraak met het feit dat $\mathbb{R}$ niet aftelbaar is.

Conclusie: $\mathbb{R} \setminus A$ niet aftelbaar.

5a.

x	1	2	3	4	5
x^2	1	4	3	4	1
x^3	1	2	3	4	5
x^4	1	4	3	4	1

Voorbeeld berekening:
- $4^2 \equiv 4 \bmod 6 \Rightarrow$
$4^3 \equiv 4 \cdot 4^2 \equiv 4 \cdot 4 \equiv 4 \bmod 6$
- $5^4 \equiv 5 \cdot 5^3 \equiv 5 \cdot 5 \equiv 1 \bmod 6$
etcetera.

Uit de regelmaat van de tabel zien we al dat $3^k \equiv 3 \pmod 6$ voor alle k, en $5^k \equiv 1 \pmod 6$ als k even is en $5^k \equiv 5 \pmod 6$ voor k oneven. Etcetera.

5b. Maak gebruik van modulo-rekenen!!!

$$42 \cdot 4^{2016} + 51 \cdot 15^{2017} + 22 \cdot 8^{2018} + 37 \cdot 11^{2019} \equiv$$
$$0 \cdot 4^{2016} + 3 \cdot 3^{2017} + 4 \cdot 2^{2018} + 1 \cdot 5^{2019} \bmod 6$$
$$\equiv 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \bmod 6$$
$$\equiv 3 + 4 + 5 \bmod 6 \equiv 12 \bmod 6 \equiv 0 \bmod 6.$$

5c. Basis: $n = 0$: $5 \cdot 2^1 + 2 \cdot 5^0 = 10 + 2 = 12$ is deelbaar door 6.

Inductiehypothese (IH)
Stel dat $5 \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot 5^n$ deelbaar is door 6 $(*)$

-vervolg 5c

Inductiestap: onder aanname (IH) moeten we bewijzen dat dan ook $5\cdot 2^{n+1+1} + 2\cdot 5^{n+1} = 5\cdot 2^{n+2} + 2\cdot 5^{n+1}$ deelbaar is door 6.

Bewijs: $5\cdot 2^{n+2} + 2.5^{n+1}$ = (probeer terug te brengen tot (*))

$= 2\cdot 5\cdot 2^{n+1} + 2\cdot 5^{n+1} =$

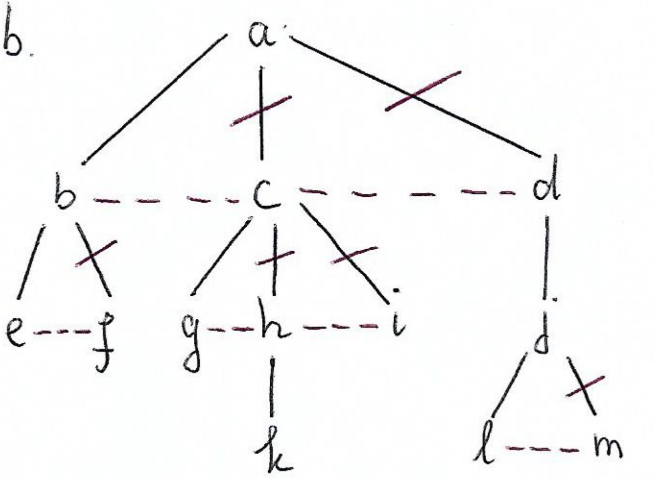
$= 2\cdot\left(5\cdot 2^{n+1} + 2.5^{n}\right) - \underbrace{2\cdot 2}_{4}\cdot 5^{n} + \underbrace{2\cdot 5}_{10}\cdot 5^{n} =$

$= 2\cdot\left(\underbrace{5\cdot 2^{n+1} + 2\cdot 5^{n}}_{\text{deelbaar door 6 vanwege (IH)}}\right) + \underbrace{6\cdot 5^{n}}_{\text{deelbaar door 6}}$ is dus deelbaar door 6. □

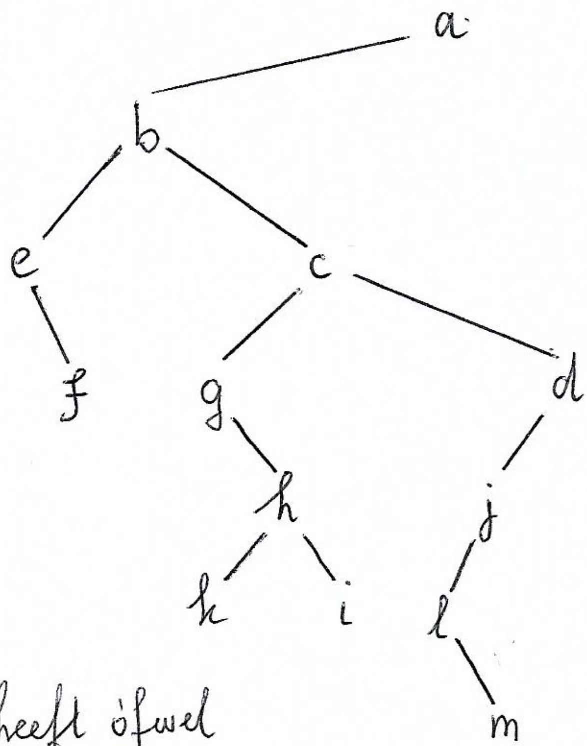
Conclusie: $5.2^{n+1} + 2\cdot 5^{n}$ is deelbaar door 6 voor alle $n \geq 0$.

6a. WLR: a, b, e, f, c, g, h, k, i, d, j, l, m
LRW: e, f, b, g, k, h, i, c, l, m, j, d, a

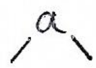
b.



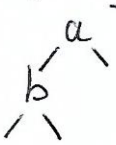
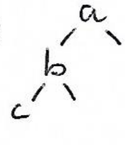
/ eerstekind → linkerkind
--- rechterbroer → rechterkind



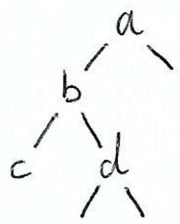
c. Een binaire boom is <u>vol</u>: elke knoop heeft ófwel twee kinderen (interne knoop), ófwel nul kinderen (blad)

WLR ⇒ a in de wortel; a heeft 2 kinderen:  ,

de volgende in de WLR-volgorde móet dus het linkerkind van a zijn:

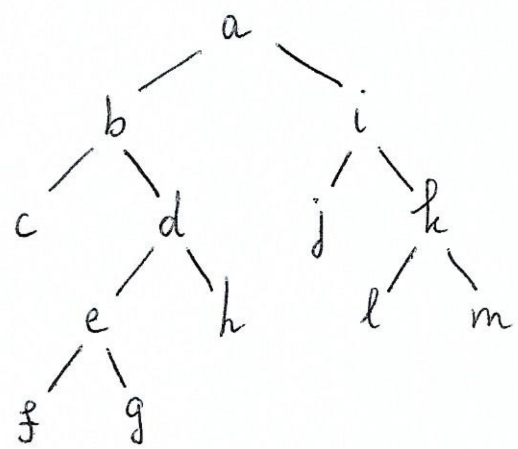
 b heeft 2 kinderen ⇒ c is b's linkerkind ; 

c is een blad, dus de volgende in de WLR-volgorde moet het rechter-kind van b zijn:

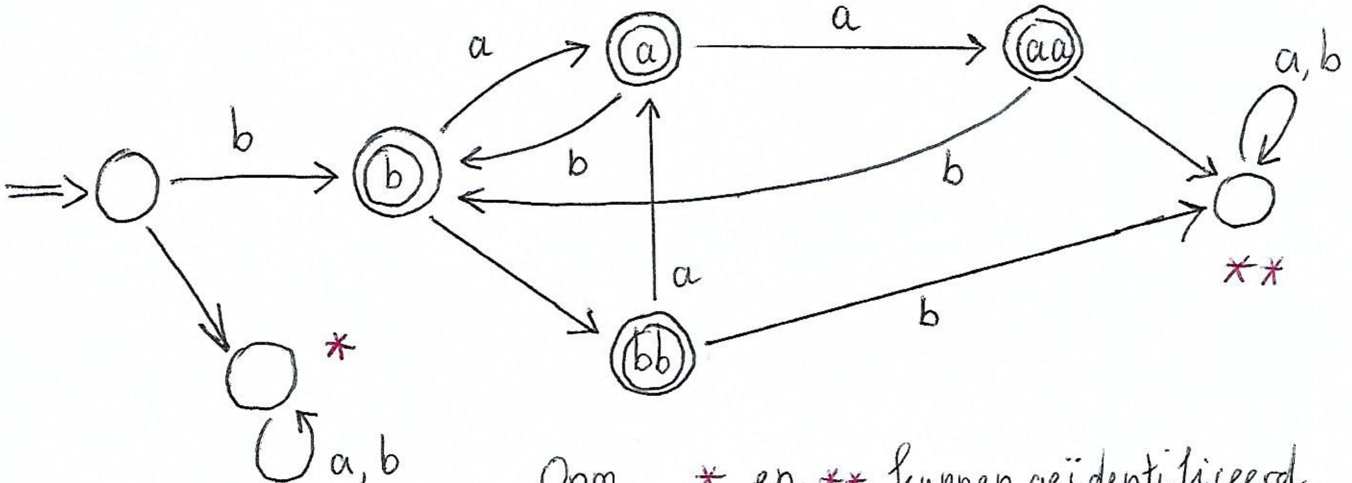


Etcetera.

Eindantwoord:



7a.



Opm. * en ** kunnen geïdentificeerd worden.

Uitleg: er moet met b begonnen worden, dus eerste letter a is meteen al fout, wat er daarna ook gelezen wordt.
Na de eerste letter b moeten we aantallen a's en b's achter elkaar bijhouden; knopen voor: net 1x een a gelezen, net 2x een a gelezen, en idem b.

7b. $\{a,b\}^* - L$ bevat precies alle woorden die met een a beginnen* en/of die juist wel drie of meer a's of drie of meer b's bevatten. Ook het lege woord*. *: woorden die niet met een b beginnen.

$K = \{ w \in \{a,b\}^* \mid w = \lambda$ of w begint met een a of w bevat minstens drie a's achter elkaar of w bevat minstens drie b's achter elkaar (of beide) $\}$

Voorbeelden: λ, abab, baaab, abbbb, etcetera

7c. $K = \{\lambda\} \cup \{a\} \cdot \{a,b\}^* \cup \{a,b\}^* \cdot \{aaa\} \cdot \{a,b\}^*$
$\cup \{a,b\}^* \cdot \{bbb\} \cdot \{a,b\}^*$