Recursie en inductie

deel 2

Negende college

inductiebewijzen

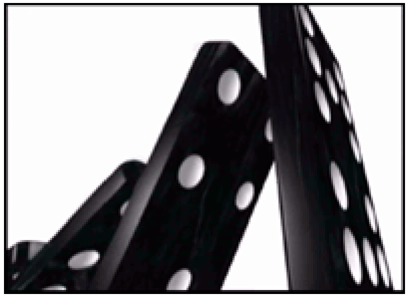
inductieprincipe

Structurele inductie (inductie naar de opbouw) is de bewijstechniek die hoort bij inductief opgebouwde ‘objecten’ zoals bomen of talen.

eigenschap natuurlijke getallen $\Rightarrow$ volledige inductie

Bij eigenschappen van de (verzameling der) natuurlijke getallen (ook inductief opgebouwd) heet de methode volledige inductie.

volledige inductie



$\mathbb{N}$ natuurlijke getallen

i. basis

Bewijs dat $P(0)$ waar is.

ii. inductiestap

Bewijs voor willekeurige $n \in \mathbb{N}$:

als $\underbrace{P(n)}_{\text{inductie-aanname}}$ waar is, dan is $P(n+1)$ waar.

inductie-aanname

inductie-hypothese

$$P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(\, P(n) \Rightarrow P(n+1)\,) \\ \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\, P(n)\,)$$

$5^n - 2^n$ is een drievoud voor alle $n \geq 0$

inductie-bewijs

i. basis ($n=0$)

$5^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ is een drievoud.

ii. inductiestap

inductie-aanname:

Neem aan: $5^n - 2^n$ is een drievoud ($n \geq 0$)

Bewijs dat $5^{n+1} - 2^{n+1}$ een drievoud is.

$$\underbrace{5 \cdot (5^n - 2^n) + 3 \cdot 2^n}_{\text{drievouden}} = 5 \cdot 5^n - 5 \cdot 2^n + 5 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n = \underbrace{5^{n+1} - 2^{n+1}}_{\text{drievoud}}$$

drievouden $\Rightarrow$ drievoud

Natuurlijke getallen $\geq$ m

i. <u>basis</u>
Bewijs dat $P(m)$ waar is.

ii. <u>inductiestap</u>
Bewijs voor willekeurige $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$:
als $\underbrace{P(n)}_{\text{inductie-aanname}}$ waar is, dan is $P(n+1)$ waar.

inductie-aanname
inductie-hypothese

$$1 = 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \;/\; 6$$
$$1+4 = 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \;/\; 6$$
$$1+4+9 = 14 = 3 \cdot 4 \cdot 7 \;/\; 6$$
$$1+4+9+16 = 30 = 4 \cdot 5 \cdot 9 \;/\; 6$$
$$1+4+9+16+25 = 55 = 5 \cdot 6 \cdot 11 \;/\; 6$$
$$1+4+9+16+25+36 = 91 = 6 \cdot 7 \cdot 13 \;/\; 6$$

...

$$\boxed{6 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)}$$

volledige inductie voorbeeld

$$\boxed{6\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)}$$

eigenschap natuurlijke getallen $\Rightarrow$ volledige inductie

basis: n=1.

$6\cdot(1^2) = 1(1+1)(2+1)$ ☺

inductiestap:

neem aan dat de formule klopt voor n,
en bewijs haar voor n+1.

$$6\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 6(n+1)^2 =$$

$$n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2 =$$

$$(n+1)\{n(2n+1)+6(n+1)\} =$$

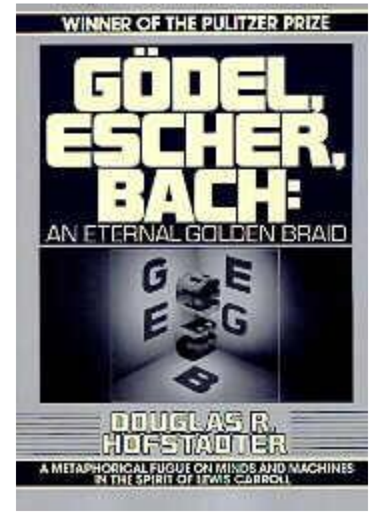
$$(n+1)(2n^2+n+6n+6) =$$

$$(n+1)(n+2)(2n+3)$$ ☺

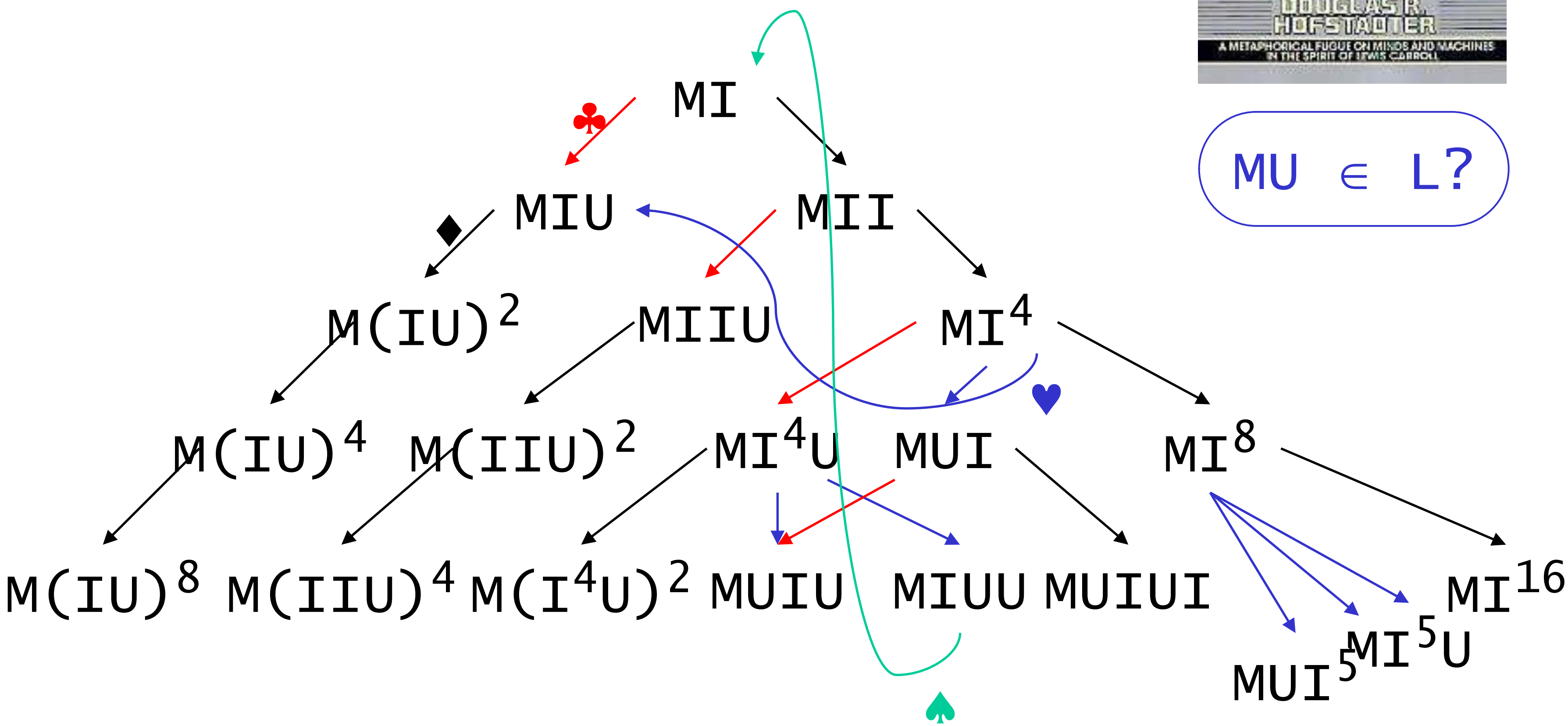
$\boxed{\text{inductie-aanname}}$

!!! Breng het geval n+1 terug tot het geval n door de laatste term van de som apart te nemen

- MI $\in$ L
- als xI $\in$ L dan xIU $\in$ L ♣
  als Mx $\in$ L dan Mxx $\in$ L ♦
  als xIIIy $\in$ L dan xUy $\in$ L ♥
  als xUUy $\in$ L dan xy $\in$ L ♠
- L bevat geen andere elementen



MU $\in$ L?



MU eigenschappen

- MI ∈ L
- als xI ∈ L dan xIU ∈ L ♣
  als Mx ∈ L dan Mxx ∈ L ♦
  als xIIIy ∈ L dan xUy ∈ L ♥
  als xUUy ∈ L dan xy ∈ L ♠
- L bevat geen andere elementen

Stelling

elk woord in L begint met M

basis
MI begint met M ☺

inductie naar de opbouw
♣ als xI met M begint, dan ook xIU
♦ Mxx begint met M
♥ als xIIIy met M begint, dan ook xUy
♠ als xUUy met M begint, dan ook xy ☺

V inductief gedefinieerd

Te bewijzen P(x) voor alle x ∈ V

inductie

i. <u>basis</u>

Bewijs dat P(x) waar is,
voor alle x in de basis van V.

ii. <u>inductiestap</u>

Bewijs dat P(y) geldt voor
y geconstrueerd in de inductiestap,
onder de aanname dat P(x) waar is
voor alle x waaruit y geconstrueerd is,
dus de ‘kleinere’ gevallen.

inductie-aanname

MU $\notin$ L

- MI $\in$ L
- als xI $\in$ L dan xIU $\in$ L ♣
  als Mx $\in$ L dan Mxx $\in$ L ♦
  als xIIIy $\in$ L dan xUy $\in$ L ♥
  als xUUy $\in$ L dan xy $\in$ L ♠
- L bevat geen andere elementen

eigenschap

aantal letters I in woorden L nooit drievoud

basis

MI heeft één I; ☺

inductie naar opbouw

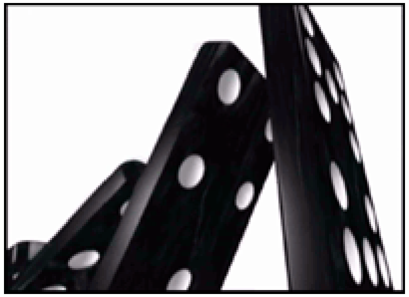
♣ xIU evenveel I's als xI: geen drievoud

♦ Mxx tweemaal zoveel I's als Mx
en dit levert geen drievoud op

♥ uit xIIIy worden drie I's verwijderd, dit
kan ook geen drievoud opleveren

♠ xUUy evenveel I's als xy: geen drievoud ☺

*volledige inductie



$\mathbb{N}$ natuurlijke getallen

i. basis

Bewijs dat $P(0)$ waar is.

ii. inductiestap

Bewijs dat voor willekeurige $n \in \mathbb{N}$:

als $P(k)$ waar is, dan is $P(n+1)$ waar.

voor alle $k \leq n$

inductie-aanname

* Deze versie van het principe van volledige inductie is equivalent met de eerder gegeven formulering.

recurrente betrekking

$t_0 = 5,\ t_1 = 6$
$t_n = t_{n-1} + 6t_{n-2} - 12n + 8 \quad (n \geq 2)$

$t_n = 3^n + (-2)^n + 2n + 3$ gesloten uitdrukking

basis:

$n=0 \quad 3^0 + (-2)^0 + 2 \cdot 0 + 3 = 5$
$n=1 \quad 3^1 + (-2)^1 + 2 \cdot 1 + 3 = 6 \quad$ (ok)

inductiestap:

inductie-
aanname

$t_{n+1} = t_n + 6t_{n-1} - 12 \cdot (n+1) + 8 =$
$3^n + (-2)^n + 2n + 3 + 6 \cdot (3^{n-1} + (-2)^{n-1} + 2 \cdot (n-1) + 3)$
$- 12 \cdot (n+1) + 8 =$
$(1+2) \cdot 3^n + (1-3) \cdot (-2)^n + (2+12 \ldots 12+18-12+8) =$
$3^{n+1} + (-2)^{n+1} + 2 \cdot (n+1) + 3$ (ok!)

dit is een beetje compact, ik heb het hierna uitgeschreven

inductiestap

$$t_{n+1} = 3^{n+1} + (-2)^{n+1} + 2(n+1) + 3$$

te bewijzen

inductie-aanname

$$t_n = 3^n + (-2)^n + 2n + 3$$
$$t_{n-1} = 3^{n-1} + (-2)^{n-1} + 2(n-1) + 3$$

$$t_{n+1} = t_n + 6t_{n-1} - 12\cdot(n+1) + 8$$

definitie t_n

$$= 3^n + (-2)^n + 2n + 3 +$$

$$6\cdot(3^{n-1} + (-2)^{n-1} + 2\cdot(n-1) + 3) - 12\cdot(n+1) + 8 =$$

$$(1+2)\cdot 3^n + (1-3)\cdot(-2)^n + (2+12-12)\cdot n + (3-12+18-12+8)$$

$$= 3^{n+1} + (-2)^{n+1} + 2\cdot(n+1) + 3 \qquad \text{(ok!)}$$

inductiestap

Dat ga ik zo niet allemaal voorlezen bij de les, want nogal saai. Het is gewoon middelbare school rekenkunde, die je wel zelf moet kunnen invullen en controleren!

$$t_{n+1} = t_n + 6t_{n-1} - 12\cdot(n+1) + 8$$

$$= 3^n + (-2)^n + 2n + 3 +$$

$$6\cdot(3^{n-1} + (-2)^{n-1} + 2\cdot(n-1) + 3) - 12\cdot(n+1) + 8 =$$

$$(1+2)\cdot 3^n + (1-3)\cdot(-2)^n + (2+12-12)\cdot n + (3-12+18-12+8)$$

$$= 3^{n+1} + (-2)^{n+1} + 2\cdot(n+1) + 3 \qquad \text{(ok!)}$$

- Bewijs: $1+\sum_{i=1}^{n}(i\cdot i!) = (n+1)!$

  voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$

De verzameling van Blurpsen is de kleinste verzameling zodat:

1. Δ is een Blurps.
2. Als x een Blurps is, dan zijn ook xΔΔ en ◇xx◇ Blurpsen.
3. Als x en y Blurpsen zijn, dan is ook xΔy een Blurps.

Laat zien dat alle Blurpsen een oneven aantal driehoekjes Δ hebben of ten minste één ruit ◇ bevatten.

Opgave 50