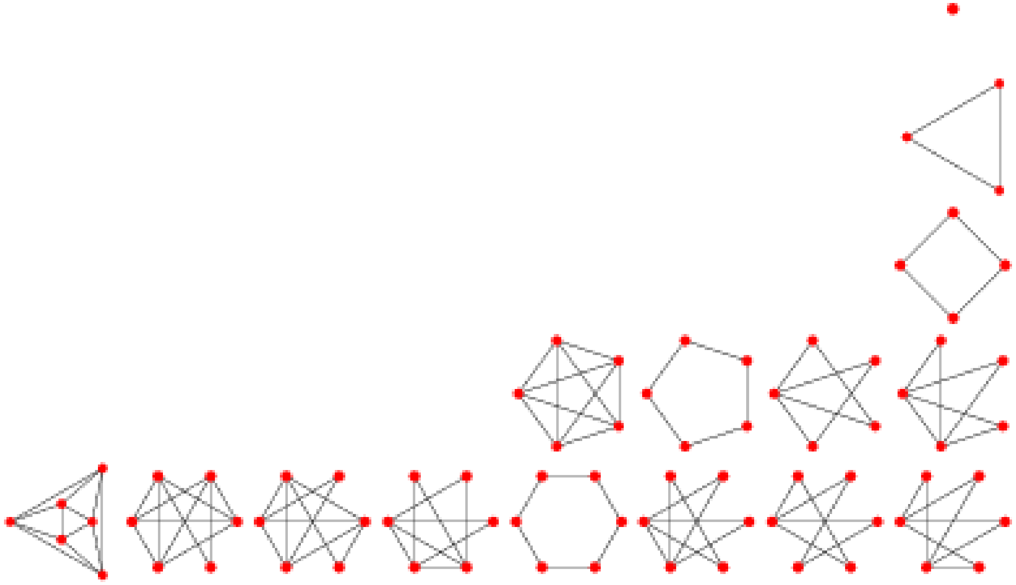
Grafen
deel 2

8/9

Zevende college



H8: ongerichte graaf

Een graaf $G = G(V,E) = (V,E)$ bestaat uit twee *(eindige)* verzamelingen:

- V knopen (punten; vertices, nodes, points)
- E lijnen (*takken*, zijden, kanten, bogen; edges)

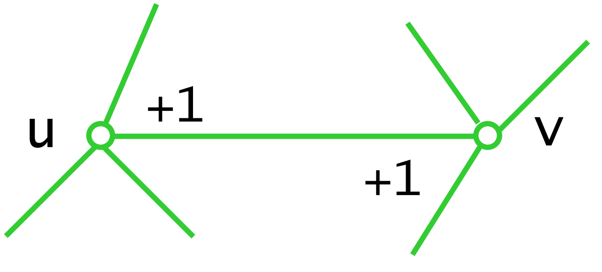
lijn $e = \{u,v\}$ ~ *ongeordend* tweetal (verschillende) knopen uit V; lijn (of tak) *tussen* u en v

Theorem 8.1: handshaking lemma

In een graaf $G = (V,E)$ geldt

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

De som der graden is twee keer het aantal lijnen.



(u,v): bijdrage +1 aan deg(u) en +1 aan deg(v), dus wordt 2x 'geteld' in $\sum_{v \in V} \deg(v)$

pad $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n$

ook wel: wandeling

$$e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$$

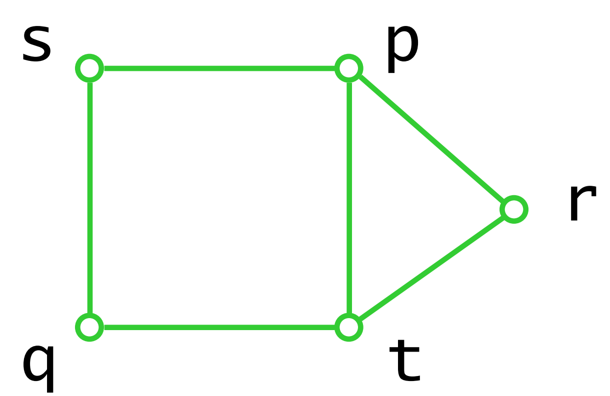
lengte n = aantal lijnen

van v_0 naar v_n

(tussen…, verbindt…)

begin- en eindpunt

gesloten pad $v_0 = v_n$



$(v_0, v_1, \ldots, v_n)$

$v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_n$

$v_0, v_1, \ldots, v_n$

$v_0 v_1 \ldots v_n$

andere notaties (niet voor multigrafen)

p→t→r→p→s→q→t→p

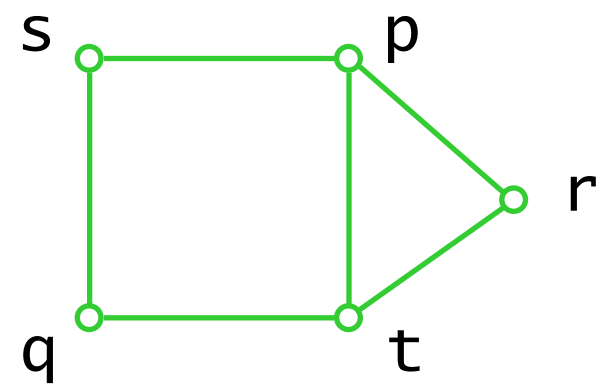
gesloten pad *(kring)*

lengte 7

p,t,r,p,s,q,t,p

pad $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$

$e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$



simpel pad verschillende v_i
trail verschillende e_i
cykel $n \geq 3$ &
gesloten &
verschillende v_i, behalve $v_0 = v_n$
circuit gesloten trail

In het algemeen noemen we een gesloten pad wel een *kring*. Als de knopen verschillen: cykel; als de lijnen verschillen: circuit

In het algemeen noemen we een gesloten pad wel een *kring.* Als de knopen verschillen: cykel; als de lijnen verschillen: circuit

Merk op dat een cykel een speciaal soort circuit is, namelijk een circuit waarin niet alleen de lijnen, maar ook de knopen verschillen.

In het algemeen zijn er grote verschillen in de terminologie die gebruikt wordt voor paden en kringen. Let dus altijd op wat precies bedoeld wordt. Bij dit college hanteren we de definities zoals die op de vorige slide staan. Dit komt overeen met de terminologie die in Schaum wordt gebruikt, al staat het begrip *circuit* daar niet precies gedefinieerd.

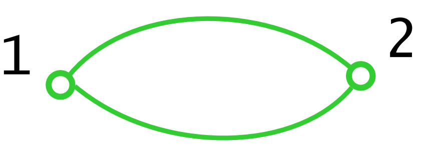
simpel pad verschillende v_i

cykel $n \geq 3$ &

gesloten &

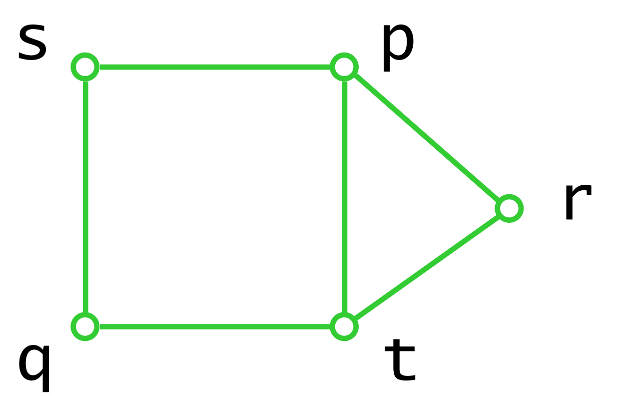
verschillende v_i, behalve $v_0 = v_n$

De eis $n \geq 3$ voor cykel is om te vermijden dat een enkele lijn die heen en weer doorlopen wordt ook als cykel geldt; voor multigrafen wordt daarmee vermeden dat 1,2,1 een cykel zou zijn:



pad $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n$

$e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$



simpel pad verschillende v_i
trail verschillende e_i
cykel $n \geq 3$ &
gesloten &
verschillende v_i, behalve $v_0 = v_n$
circuit gesloten trail

Theorem 8.2

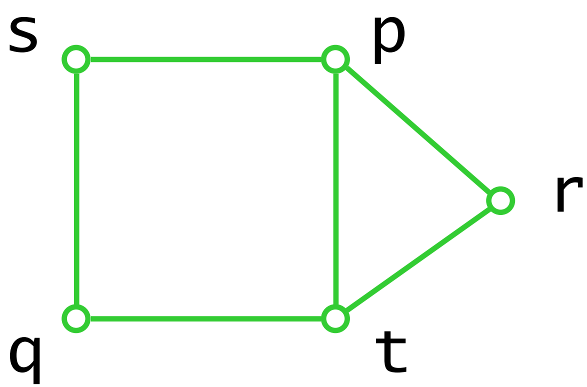
Als er een pad is van u naar v dan is er ook een simpel pad van u naar v.

Constructief bewijs:
Neem een pad π van u naar v.
Als π een herhaling van knopen bevat, dan kunnen we de lijnen in het pad tussen die knopen (en een van die knopen) weglaten. Zo vinden we een korter pad van u naar v. Als we dit herhaald doen krijgen we een simpel pad van u naar v. ∎

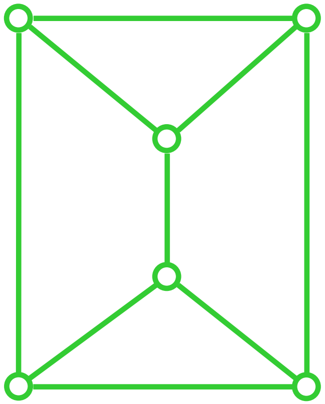
Bijvoorbeeld, stel π = 1,3,4,7,3,5,6 is een pad van 1 naar 6 in een of andere graaf. Dan kunnen we de lijnen {3,4}, {4,7} en {7,3} uit het pad verwijderen en houden we nog steeds een pad van 1 naar 6 over: 1,3,5,6. Dit pad is korter en simpel.

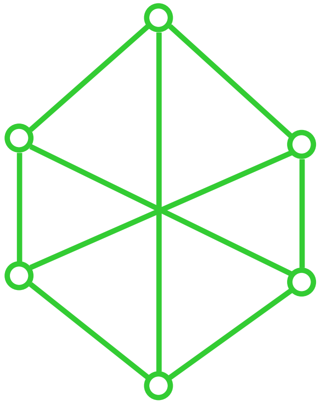
Theorem 8.2

Als er een pad is van u naar v dan is er ook een simpel pad van u naar v.



voorbeeld	*soort pad*
p→t→r→t→q	niet simpel, geen trail
p→r→t→p→s→q	niet simpel, wel trail
p→r→t→q→s	wel simpel, wel trail
kan niet	wel simpel, geen trail
p	geen cykel
p→r→p	geen cykel
r→t→p→s→q→t→r	geen cykel, geen circuit
r→t→q→s→p→r	wel cykel, wel circuit





Zijn deze grafen isomorf?

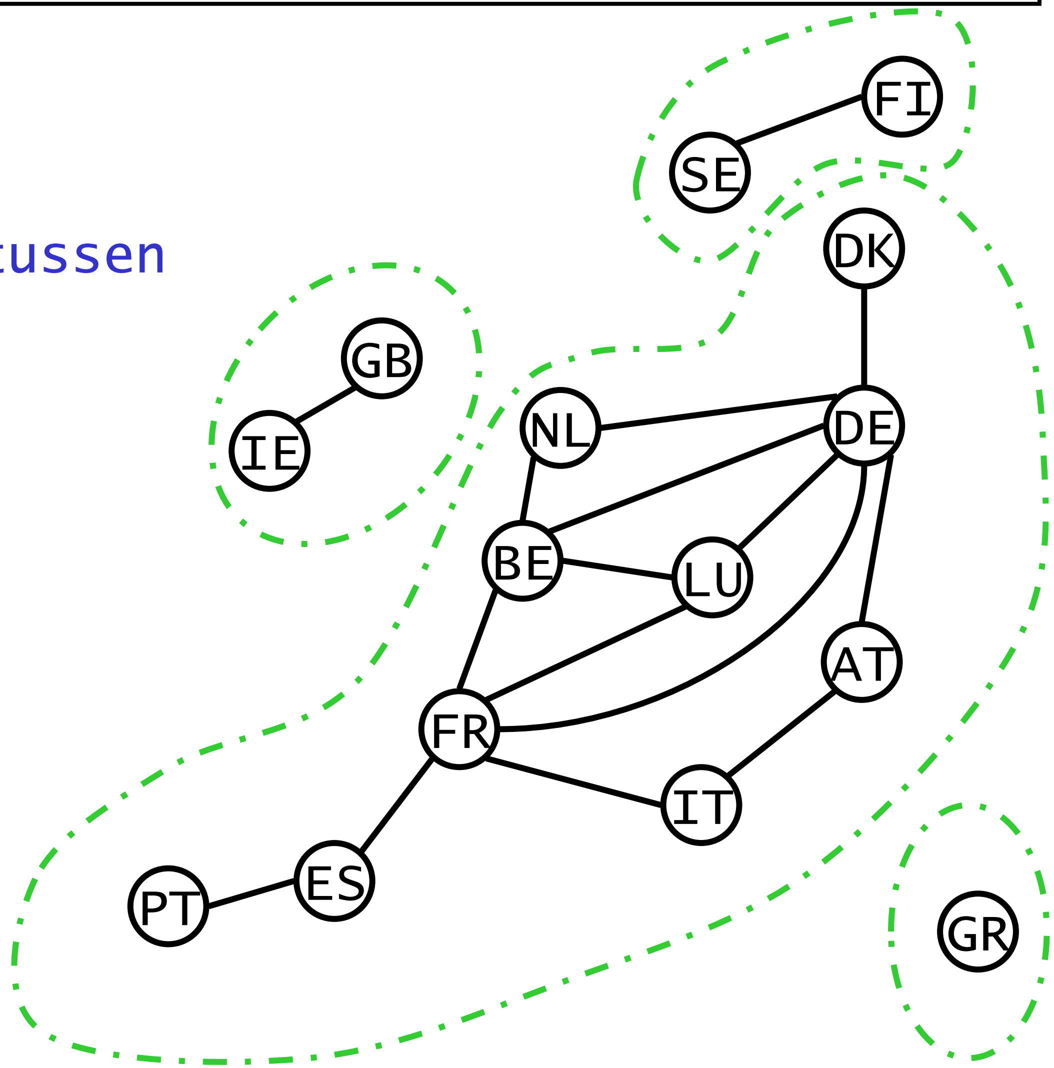
Eigenschappen die bewaard blijven:
- aantallen knopen en lijnen
- aantallen knopen van bepaalde graad
- paden van bepaalde lengte
- …

samenhangend: tussen elk tweetal punten bestaat een pad.

connected

'er bestaat een pad tussen x en y': dit is een equivalentierelatie
- reflexief
- symmetrisch
- transitief

samenhangs-
componenten



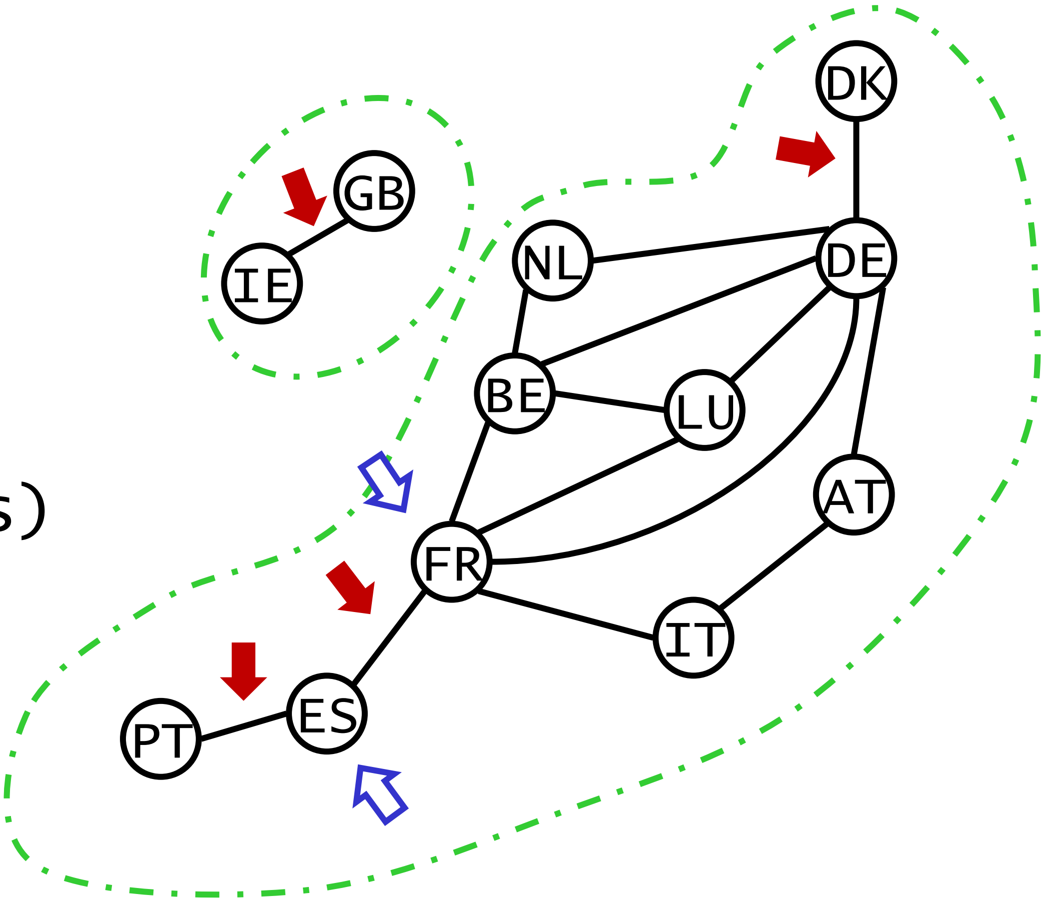
Aantal componenten neemt toe
bij verwijderen

⇩ cutpoint

G-{v}: verwijder v en
alle lijnen incident met v

⬇ bridge (isthmus)

G-{e}: verwijder e



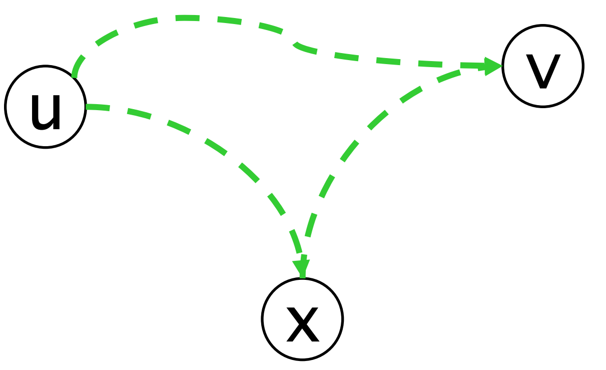
er zijn dan twee delen van de graaf alleen
met elkaar verbonden via die knoop/lijn

afstand

afstand: lengte van een *kortste* pad tussen u en v
Notatie: $d(u,v)$
Tussen verschillende samenhangscomponenten wordt de afstand op oneindig gesteld.

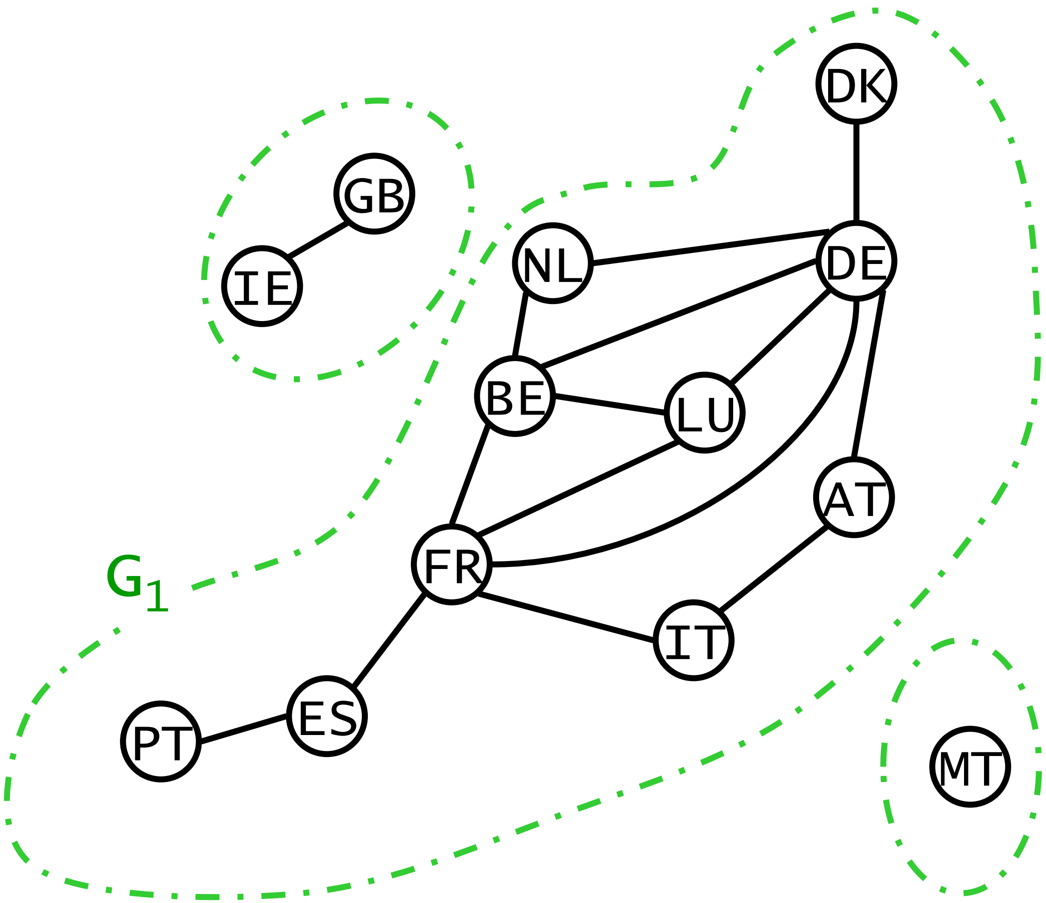
driehoeksongelijkheid

$d(u,v) \leq d(u,x) + d(x,v)$ voor elk drietal u,v en x



diameter diam(G)
= maximale afstand tussen knopen van G

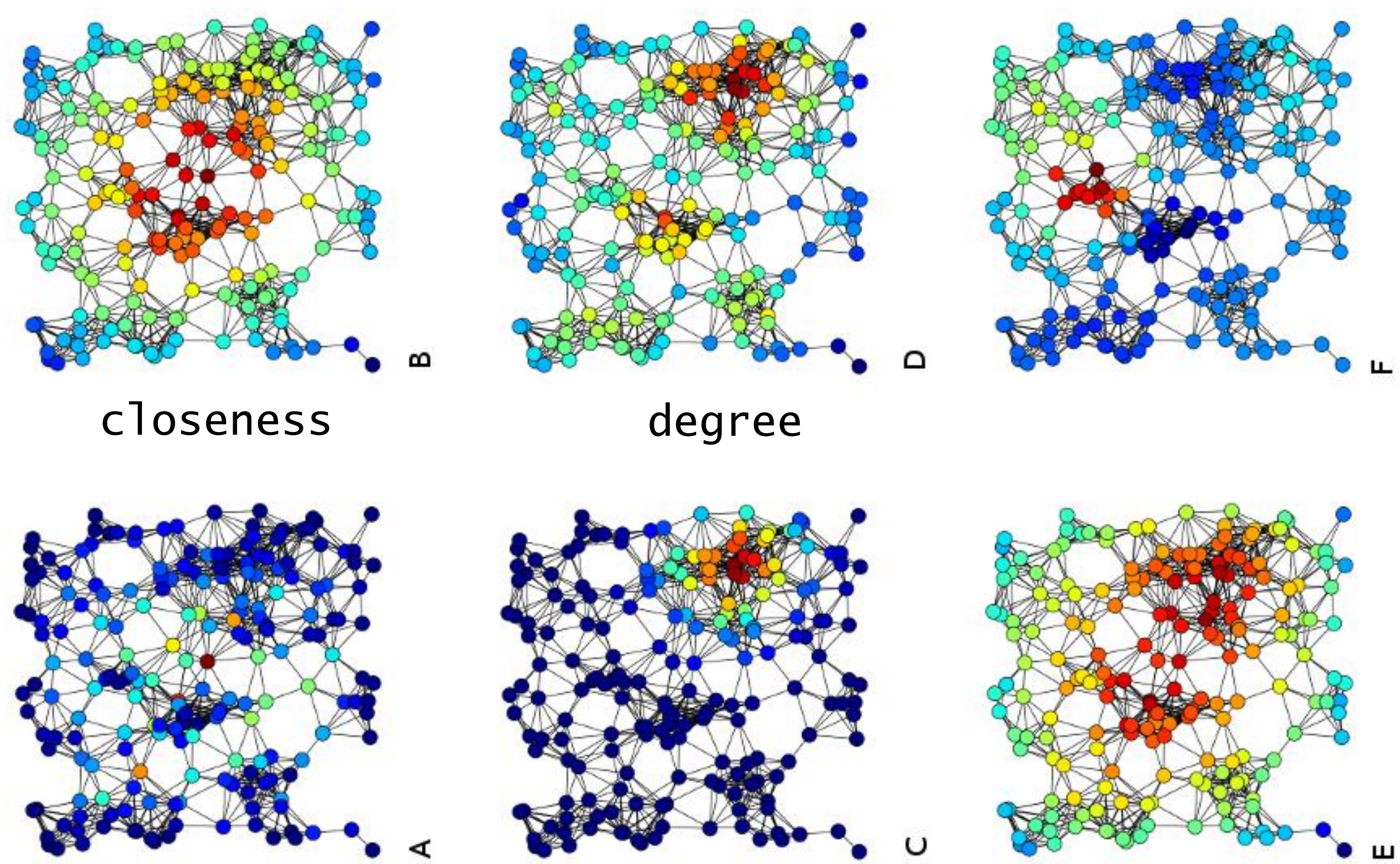
afstanden



$d(ES, DK) = 3$
$d(BE, AT) = 2$
$d(GB, GB) = 0$
$d(IE, FR) = \infty$

$diam(G_1) = 4$

graph centrality



closeness

degree

betweenness

https://en.wikipedia.org/wiki/Centrality

graph centrality

In de “sociale netwerk analyse” probeert men waardes te definiëren die aangeven hoe ‘centraal’ knopen in een graaf liggen, een maat voor de belangrijkheid.

Dat kan bijvoorbeeld een maat zijn die aangeeft (a) hoeveel paden via die knoop lopen, (b) wat de totale/gemiddelde afstand is naar de andere knopen, (c) de graad van de knoop. En meer …

De ‘warme’ kleuren in de plaatjes zijn centraler dan de ‘koude’ volgens de betreffende maat.

http://liacs.leidenuniv.nl/~takesfw/SNACS/

§8.5 rondwandeling

Een *Eulercircuit* is een gesloten wandeling (pad) die *elke* lijn precies één keer bevat. ‘traversable’

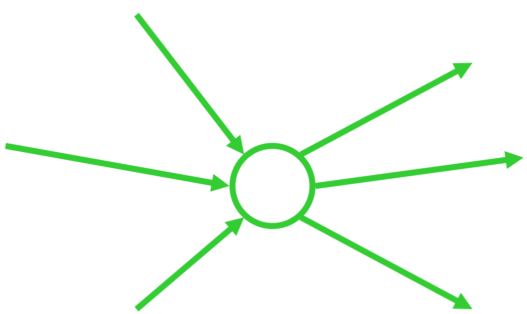
trail ‘all edges distinct’

▶ zeven bruggenprobleem van Königsbergen

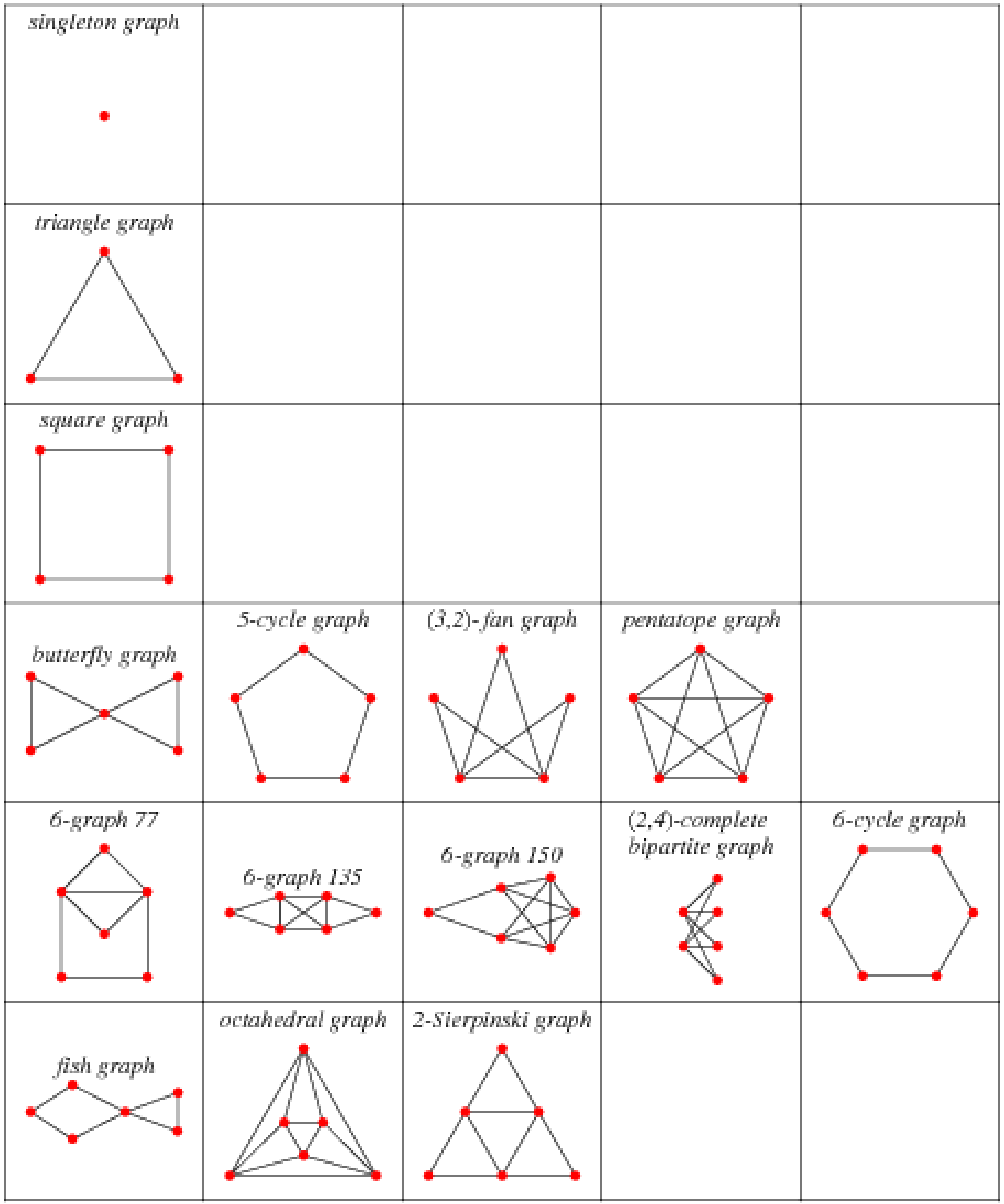
Theorem 8.3

Een samenhangende graaf heeft een Eulercircuit desda elk punt even graad heeft.

Leonhard Euler (1736)



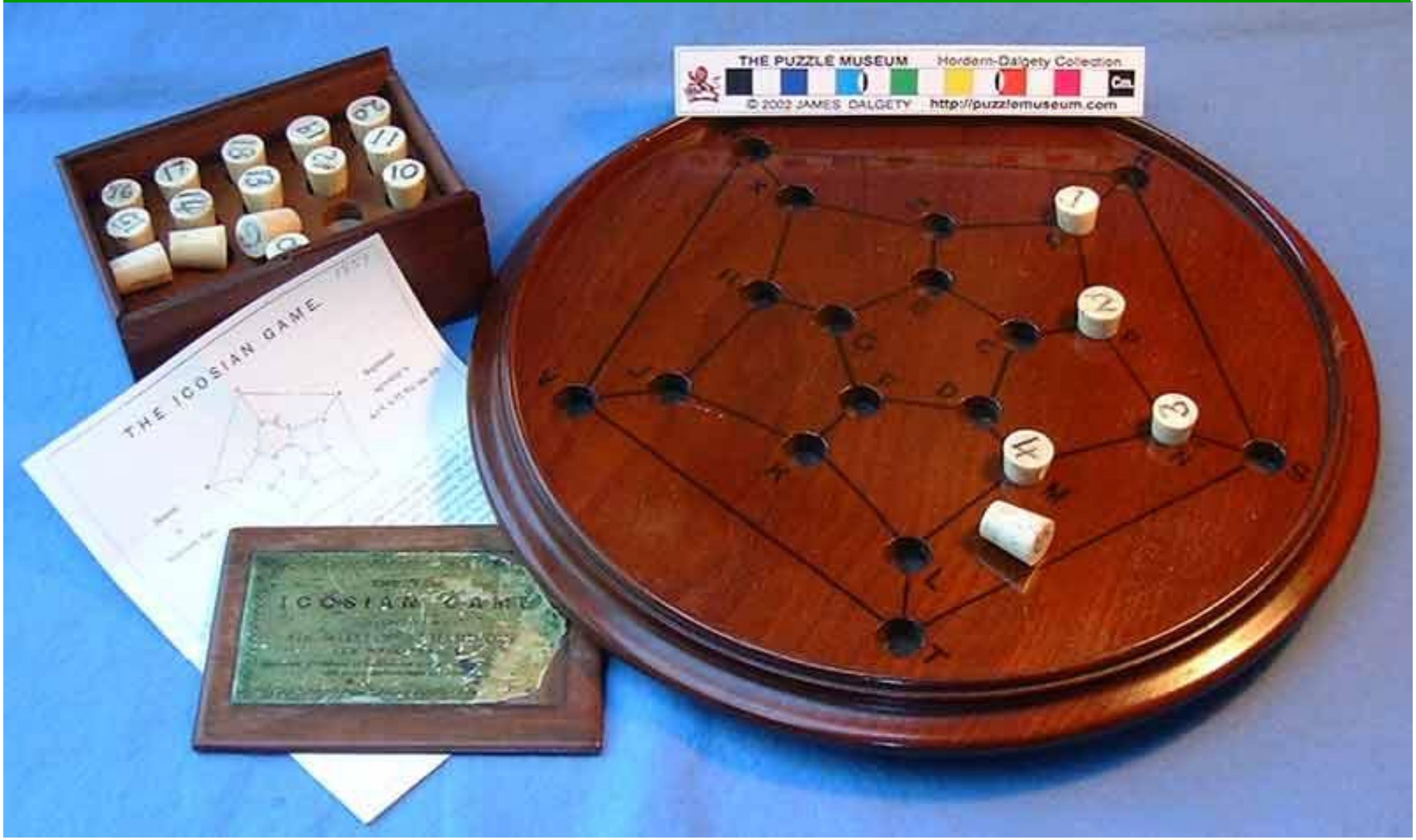
Eulergrafen



The numbers of (connected) Eulerian graphs with n nodes are 1, 0, 1, 1, 4, 8, 37, 184, 1782, ...
OEIS A003049

http://mathworld.wolfram.com/EulerianGraph.html

Icosian Game



http://puzzlemuseum.com/month/picm02/200207icosian.htm

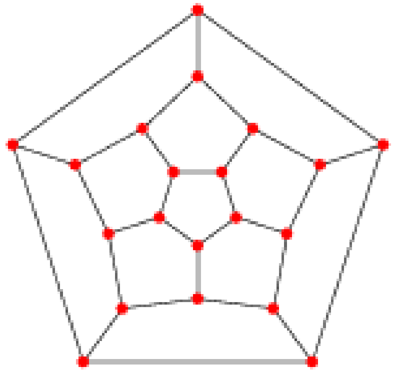
§8.5 rondwandeling

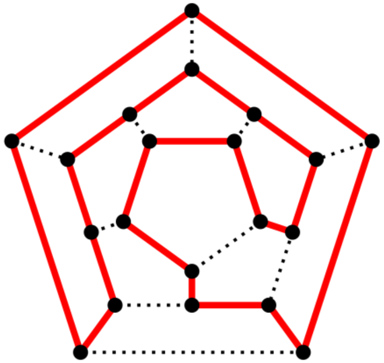
Een *Hamiltoncykel* is een gesloten wandeling (pad) die *elke* knoop behalve begin- en eindknoop precies één keer bevat.

William Rowan Hamilton (1858)

Vaak, ook in Schaum, zegt men Hamiltoncircuit. Dit is niet zo gek, aangezien een cykel een speciaal circuit is, namelijk een waarin niet alleen alle lijnen, maar zelfs alle knopen verschillen.

Hamiltongraaf





Euler vs. Hamilton

- **Eulergraaf**
  Leonhard Euler (1736) Königsberger bruggen
  gesloten, elke *lijn* precies een keer

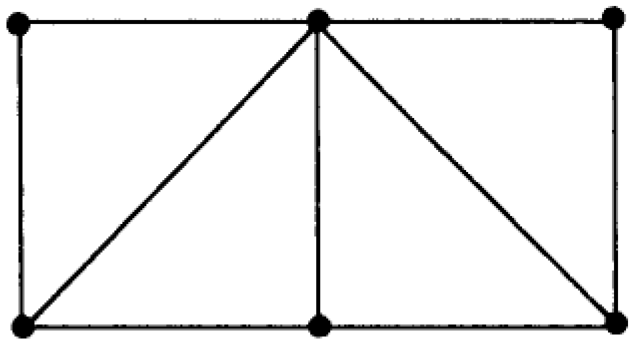
  - eenvoudige karakterisatie Theorem 8.3
  - efficient te herkennen

- **Hamiltongraaf**
  William Rowan Hamilton (1858) Icosian Game
  gesloten, elke *knoop* precies een keer
  gerelateerd: ‘handelsreizigersprobleem’

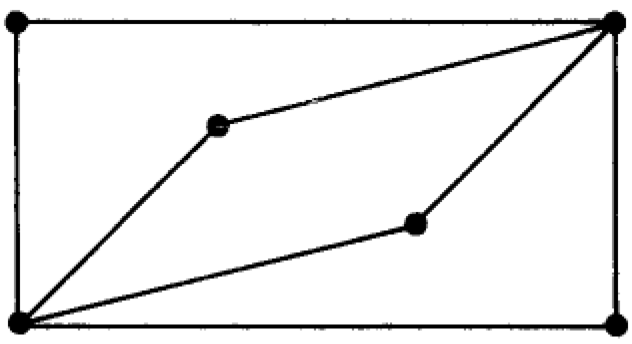
Ore (1960) A graph with n vertices (n >3) is Hamiltonian if, for each pair of non-adjacent vertices, the sum of their degrees is n or greater

  - geen karakterisatie
  - NP compleet

Euler vs. Hamilton



(*a*) Hamiltonian and non-Eulerian

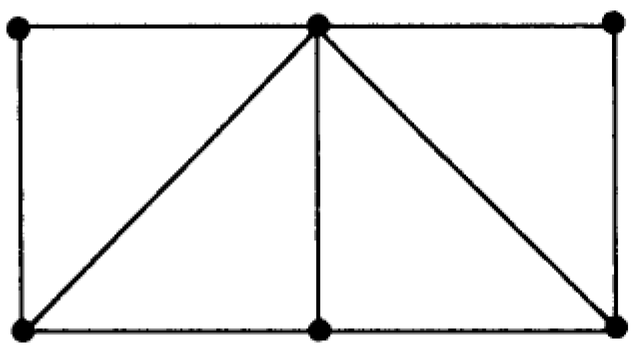


(*b*) Eulerian and non-Hamiltonian

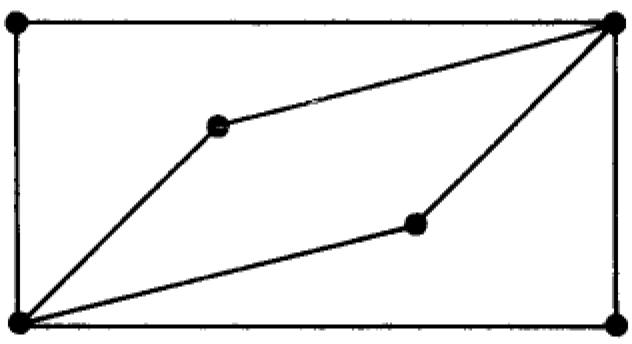
hoe bedoelt u?

“Note that
an Eulerian circuit traverses every edge exactly once, but may repeat vertices, while a Hamiltonian circuit visits each vertex exactly once but may repeat edges.”

Schaum p.161



(*a*) Hamiltonian and non-Eulerian



(*b*) Eulerian and non-Hamiltonian

hoe bedoelt u?

Note that
an Eulerian circuit traverses every edge exactly once, but may repeat vertices, while a Hamiltonian circuit visits each vertex exactly once but may repeat edges.

Schaum p.161

Vreemd:
Hoe kan een Hamilton circuit een lijn herhalen en tegelijk elke knoop slechts één keer aandoen?

Het is duidelijk dat geldt: als een (gesloten) pad de knopen maar één keer bevat, dan kan geen enkele tak meer dan eens voorkomen. Dus: cykel => circuit, maar niet omgekeerd.

tiepfout

Schaum p.162

Theorem 8.5 (Dirac, 1952): Let G be a connected graph with n vertices. Then G is Hamiltonian if n > 3 and n/2 ≤ deg(v) for each vertex v in G.

Niet om uit het hoofd te leren!
het is een *illustratie* van het type stellingen dat verkregen is om het begrip Hamiltonian te vatten.

De stelling van Ore (van enige slides hiervoor) is een 'verbetering' van deze stelling van Dirac.

gelabelde graaf

In praktische toepassingen wordt de graaf voorzien van extra informatie, meestal langs de lijnen. We spreken van een gelabelde graaf.
Als de labels *getallen* zijn heet het vaak een gewogen graaf. De gewichten stellen dan afstanden, kosten, capaciteiten (etc.) van de weergegeven verbindingen voor. Zie ook de graaf corresponderend met het spoorwegnet in een van de eerste sheets van Grafen deel 1.

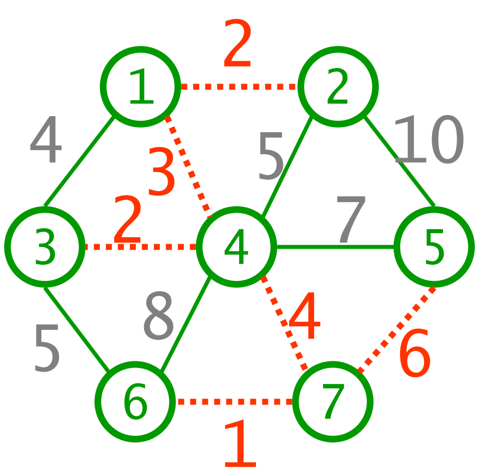
Zie verder colleges Algoritmiek en Datastructuren.

§8.6 labels & gewichten

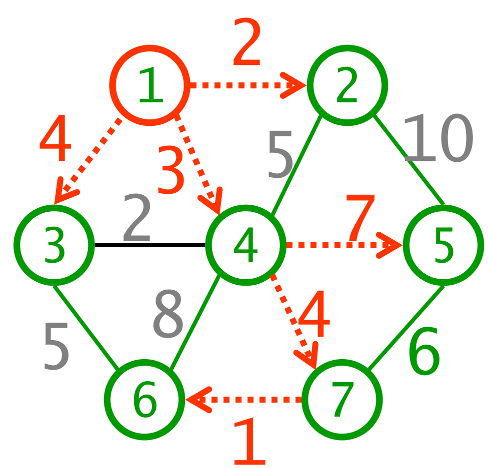
gelabelde graaf informatie op lijnen
gewogen graaf getallen op lijnen

w(e)
capaciteit & kosten (lengte, tijd, …)
gewicht van een pad:

- minimale opspannende boom
- kortste paden (minimaal gewicht)



Prim, Kruskal



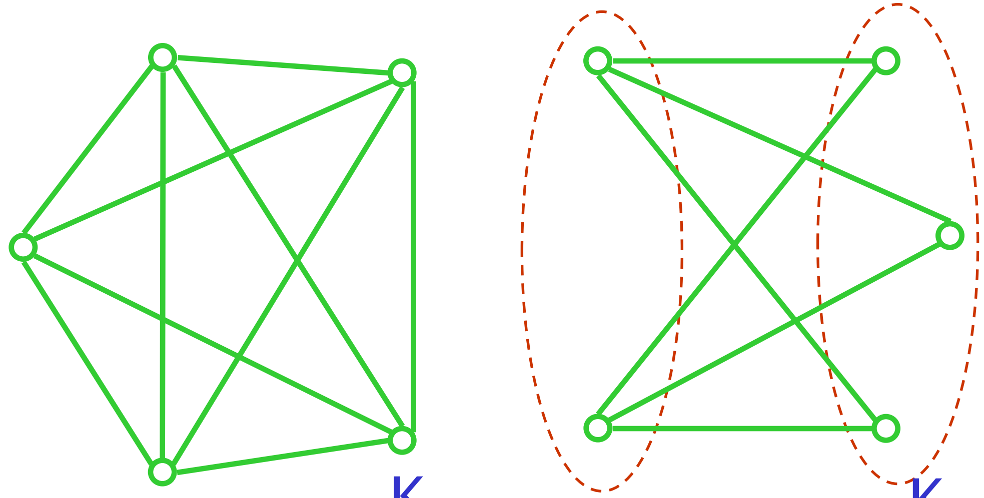
Dijkstra

volledig* K_n

volledig bipartiet

$K_{m,n}$ (of $K_{m \times n}$)

*ook wel: compleet

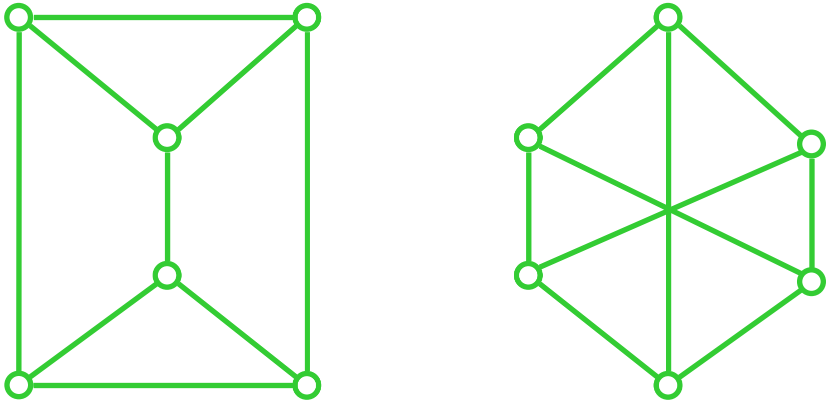


K_5 $K_{2,3}$

k-regulier

alle knopen graad k

bv. Petersen graaf is 3-regulier, evenals nevenstaande grafen

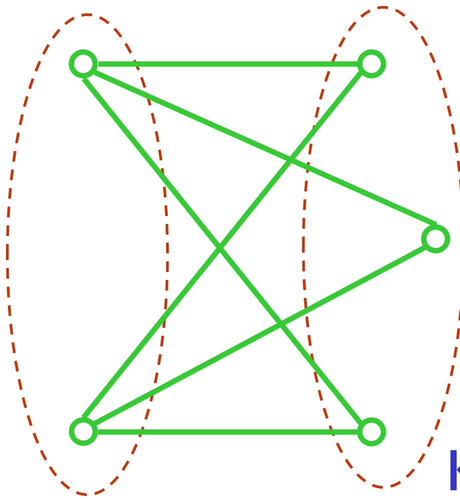


(zijn deze grafen isomorf?)

volledig K_n

volledig bipartiet $K_{m,n}$

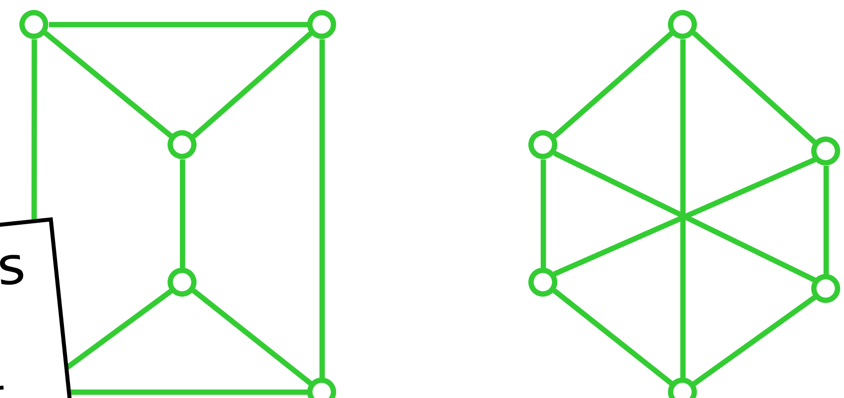
pas op: niet elke bipartiete graaf is volledig!



$K_{2,3}$

k-regulier

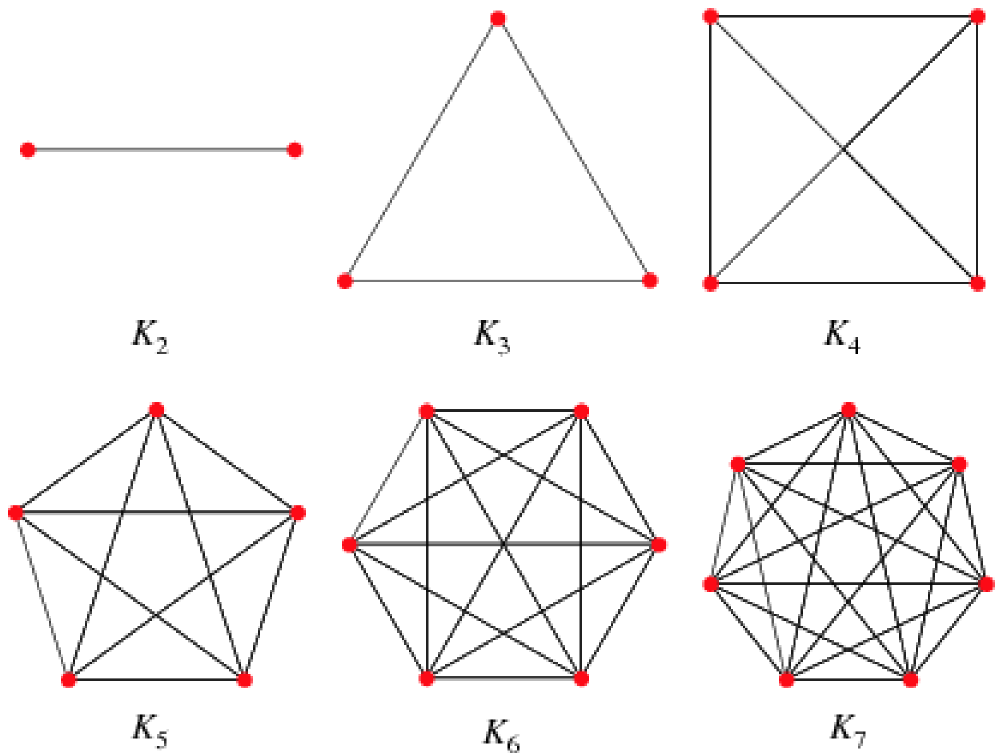
bv. Petersen graaf is 3-regulier



niet isomorf: links is er een cykel van lengte 3, rechts niet

(zijn deze grafen isomorf?)

Volledige (=complete) grafen



http://mathworld.wolfram.com/CompleteGraph.html

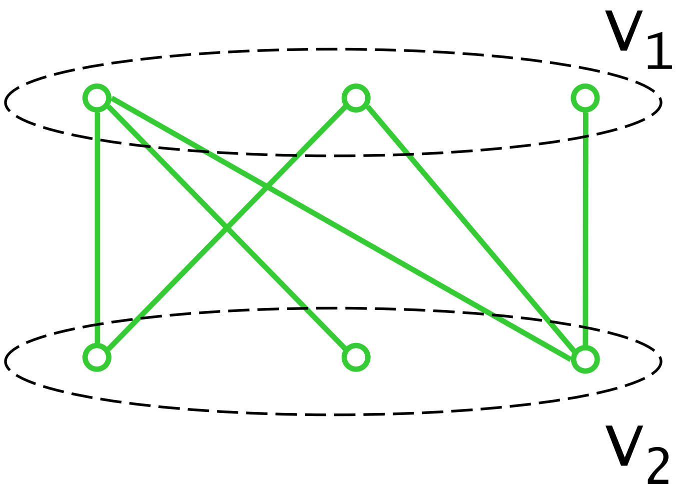
bipartiet

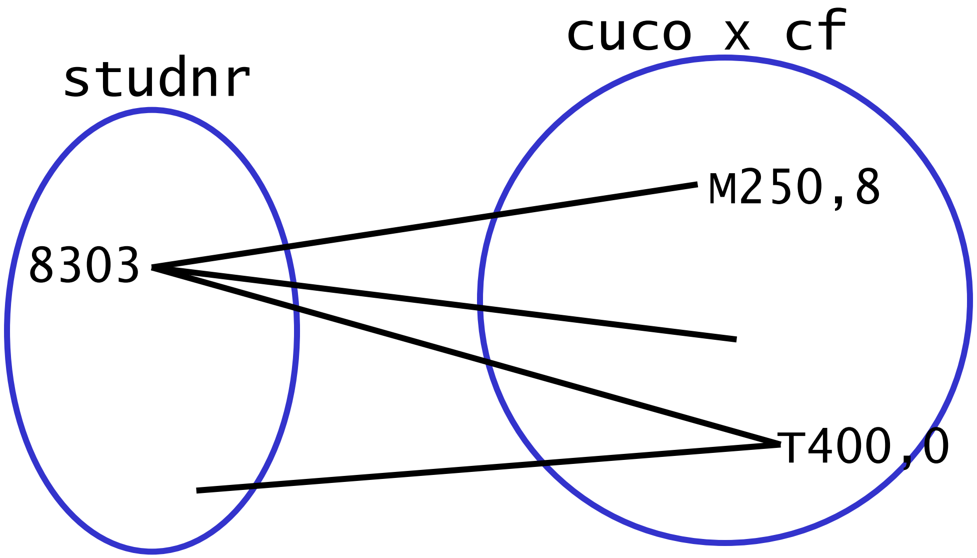
Een graaf is bipartiet als de knopen in twee deelverzamelingen V_1 en V_2 gesplitst kunnen worden zó dat de takken tussen V_1 en V_2 lopen.

Karakterisatie: de graaf bevat geen cykels van oneven lengte. Dat is een Stelling.

bipartiet

Een graaf is bipartiet als de knopen in twee deelverzamelingen V_1 en V_2 gesplitst kunnen worden zó dat de lijnen tussen V_1 en V_2 lopen.



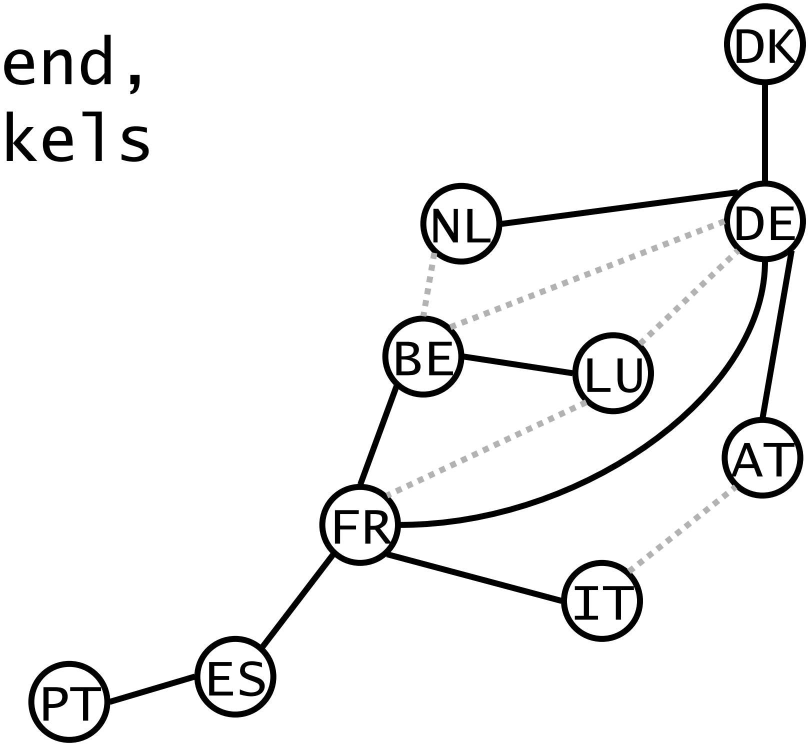


Theorem 8.11

Een graaf $G = (V,E)$ is bipartiet dan en slechts dan als G geen oneven cykels bevat.

(zie ook opgave 34)

boom(-graaf): samenhangend,
zonder cykels



Theorem 8.6

G is een graaf met n≥1 knopen. Equivalent zijn:
1. G is een boom
2. G is zonder cykels & heeft n-1 lijnen
3. G is samenhangend & heeft n-1 lijnen

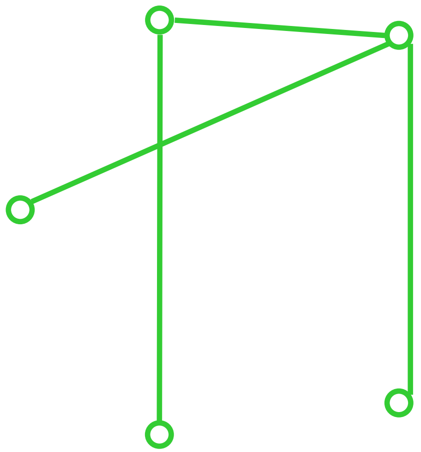
(zie later bij bomen)

opspannende boom

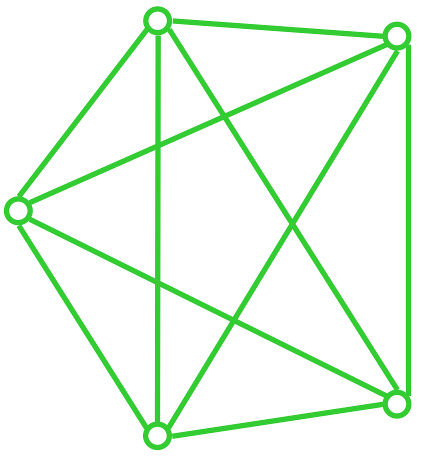
aantal lijnen

een samenhangende graaf met n knopen heeft

- minimaal n-1 lijnen
- maximaal $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ lijnen



boom: zie later



volledig: elke knoop verbonden met elke andere knoop

sommetje

1. Hoeveel 3-reguliere grafen met 4 knopen bestaan er?

2. Hoeveel 3-reguliere grafen met 5 knopen bestaan er?

3. Hoeveel volledig bipartiete grafen bestaan er met 4 knopen?

We bekijken alleen samenhangende, ongerichte grafen.

§8.9 vlakke grafen

gas, water en licht-probleem

http://www.chefgarret.com/article/256

§8.9 vlakke grafen

Vlakke (of planaire) grafen kunnen getekend worden (in het vlak) zonder kruisende lijnen

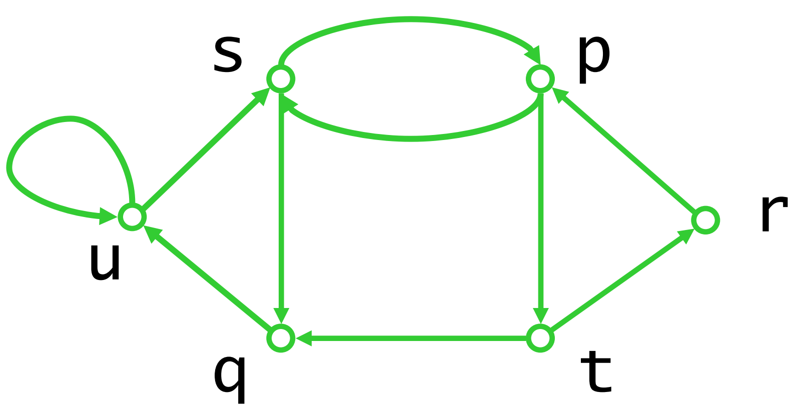
Formule van Euler: $v - e + r = 2$
relatie tussen aantal knopen v, lijnen e en 'gebieden' r in een vlakke graaf

Kuratowski: een graaf is vlak desda deze geen K_5 of $K_{3,3}$ bevat

"bevat" als homeomorfe subgraaf (tja)

gerichte graaf G bestaat uit twee (eindige) verzamelingen
- V = V(G) knopen (punten; vertices,nodes,points)
- E = E(G) pijlen (takken,kanten; edges)

pijl ~ geordend tweetal knopen uit V
e = (u,v) pijl *van* … *naar* …
begin, eind; staart, kop
v opvolger van u
lussen mogen; parallelle pijlen niet



E =
{ (p,s), (p,t),
(q,u), (r,p),
(s,p), (s,q),
(t,q), (t,r),
(u,s), (u,u) }

slordigheidje

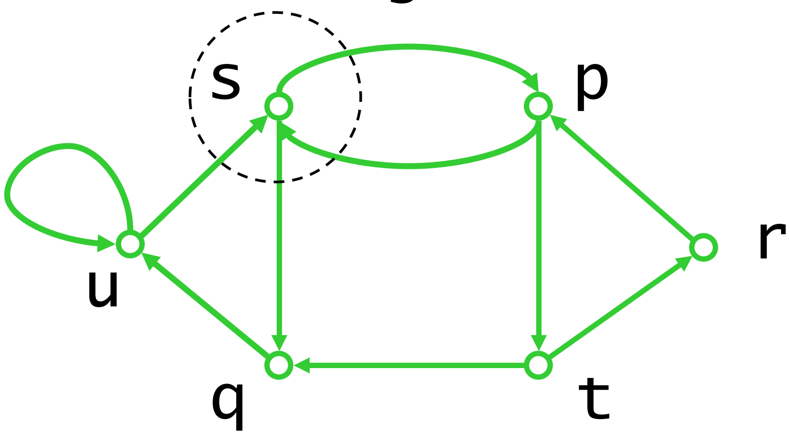
In voorbeeld 9.1 in Schaum (p 202) bevat graaf (a) twee parallelle pijlen: (B,A) komt twee keer voor in de *verzameling* E(G). Dat klopt niet met de definitie van verzameling (set). Deze voorbeeldgraaf is dus eigenlijk een gerichte multigraaf. Tja.

Merk op dat voor het definiëren van een gerichte of ongerichte multigraaf je voor E het begrip multiset zou kunnen gebruiken. In het boek en het college worden multigrafen (gericht of ongericht) in voorkomende gevallen informeel gebruikt.

uitgraad	outdeg(u)	aantal uitgaande pijlen
ingraad	indeg(u)	aantal inkomende pijlen

bron source indeg(u) = 0 put sink outdeg(u) = 0

verbindingsmatrix



naar

van

$$
\begin{array}{c}
 & \begin{array}{cccccc} p & q & r & s & t & u \end{array} \\
\begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Theorem 9.1

In een gerichte graaf $G = (V,E)$ geldt

$\sum_{v \in V} \text{outdeg}(v) = |E| = \sum_{v \in V} \text{indeg}(v)$.

(gericht) pad $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n$

$e_i = (v_{i-1}, v_i)$

lengte = aantal pijlen

simpel verschillende knopen, gesloten: cykel

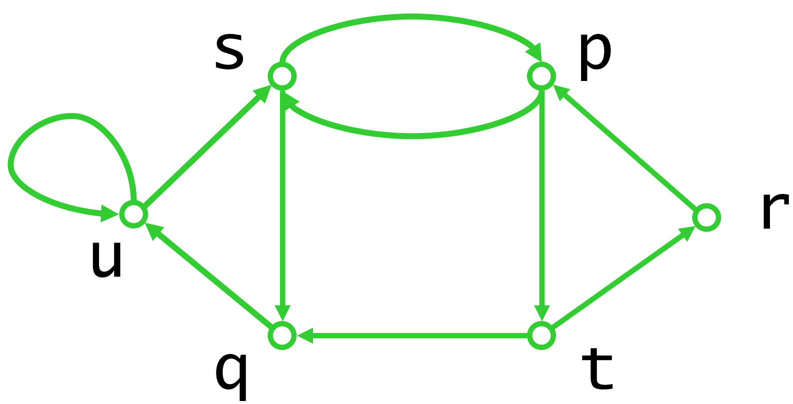
trail verschillende pijlen, gesloten: circuit

opspannend pad: bevat *alle* knopen* vgl Hamilton

cykel, circuit

ongericht pad: *semipad*

(= pad in onderliggende ongerichte graaf)



u,u en s,p,s zijn volgens deze definitie cykels

pad $q \rightarrow u \rightarrow s \rightarrow p \rightarrow t \rightarrow r$

semipad $p \rightarrow s \rightarrow q \leftarrow t \rightarrow r \leftarrow t$

*ten minste 1 keer

cykel

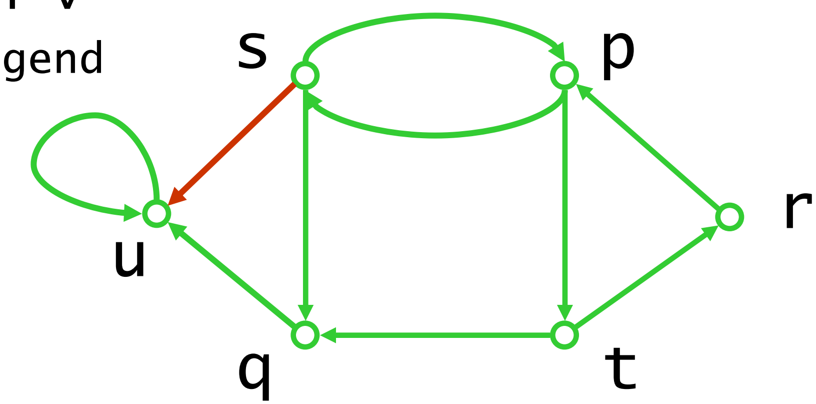
In Schaum wordt niet erg consequent omgegaan met het begrip cykel. Volgens de definitie zouden lussen en een gesloten pad zoals s,p,s in het voorbeeld van de vorige sheet cykels zijn. Schaum geeft immers geen restrictie op de lengte van het gesloten pad, zoals bij ongerichte grafen wel gebeurde.
Echter in het voorbeeld op pagina 221 (opgave 9.1 (d)) wordt Z,W,Z niet als cykel geteld. Tja.

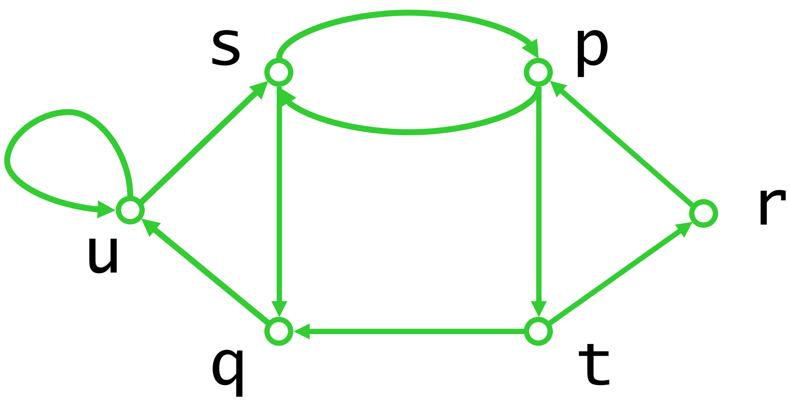
samenhangendheid

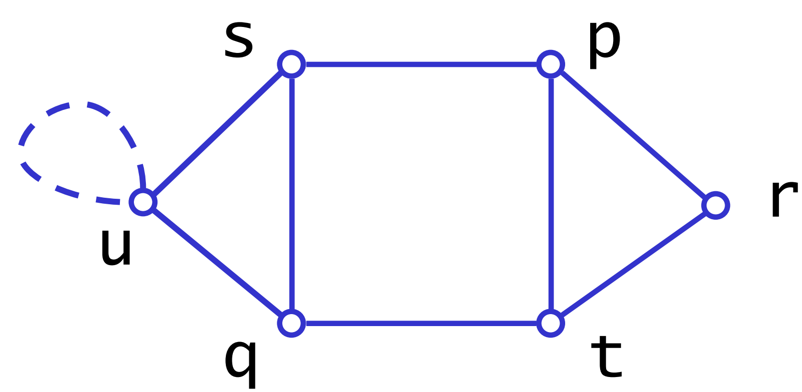
sterk samenhangend	gerichte wandelingen
zwak samenhangend	ongerichte wandelingen

sterk: voor elk tweetal knopen u,v uit V is er
een pad van u naar v <u>en</u> een pad van v naar u

zwak: voor elk tweetal knopen u,v uit V is er
een semipad tussen u en v
onderliggende graaf samenhangend







onderliggende ‘graaf’

stellingen

Theorem 9.2

sterk $\Leftrightarrow$ gesloten opspannend pad
zwak $\Leftrightarrow$ opspannend ongericht pad (semipad)

Theorem 9.3

G een gerichte graaf zonder cykels,
dan heeft G een put en een bron

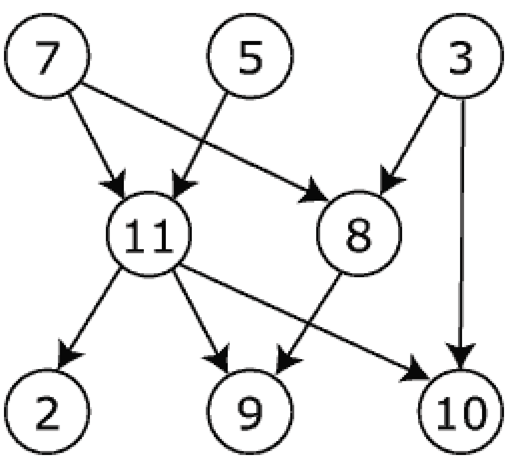
Theorem 9.8

G een gerichte graaf zonder cykels,
dan bestaat er een topologische ordening van G (*)

(*) de andere kant op geldt ook

9.9 topologische ordening

Een topologische ordening van een gerichte graaf $G = (V,E)$ is een volgorde $v_1, v_2, \ldots, v_n$ van alle knopen van G zo dat als $(v_i, v_j) \in E$, dan $i < j$.
Ofwel: je kunt de knopen van de graaf op een lijn tekenen waarbij alleen pijlen van de graaf van links naar rechts lopen.



een topologische ordening:

7, 5, 11, 2, 3, 10, 8, 9

(werk)college

Volgende week toets:
donderdag 25 oktober,
9.00 - 11.00 in het Snellius
Zie website/mededelingenbord voor zalen

Werkcollege deze week:
vrijdag 19 oktober,
9.00 - 10.45 in zalen 402, 405, 408
(Snellius)

Volgende college:
dinsdag 30 oktober,
13.30 – 15.15 in zaal C3 (Gorlaeus)