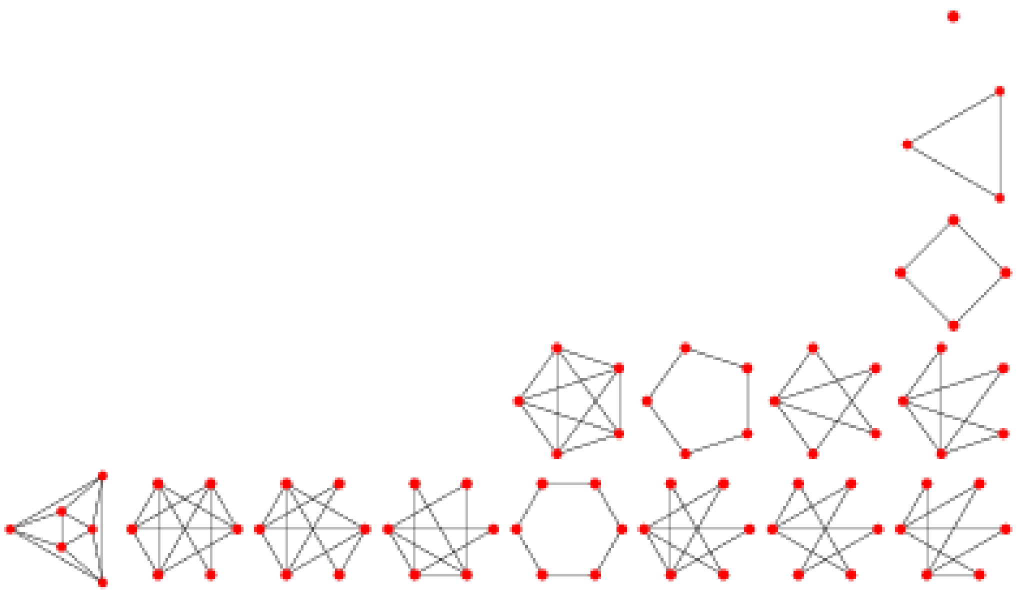
Grafen
deel 1

8

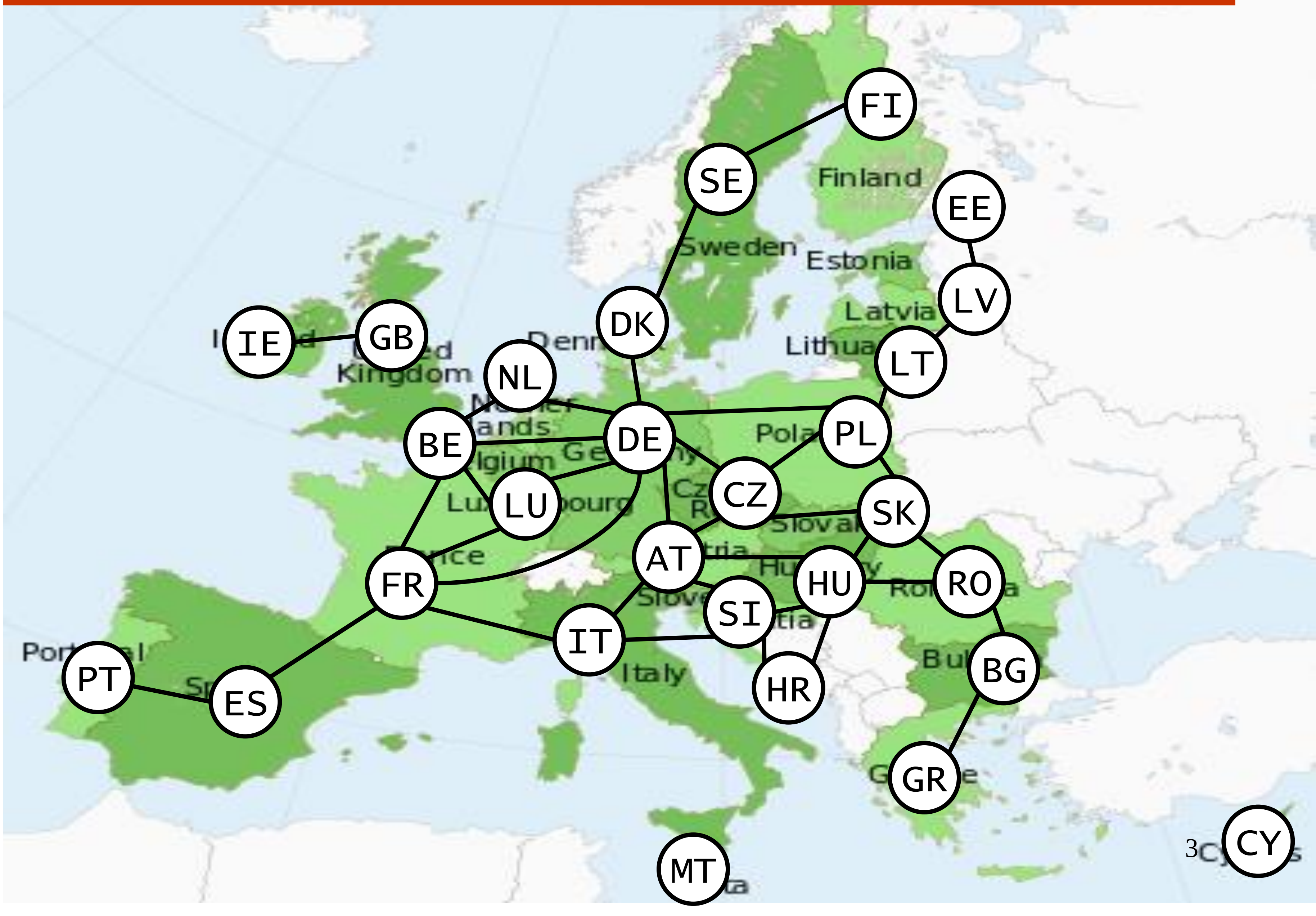
Zesde college



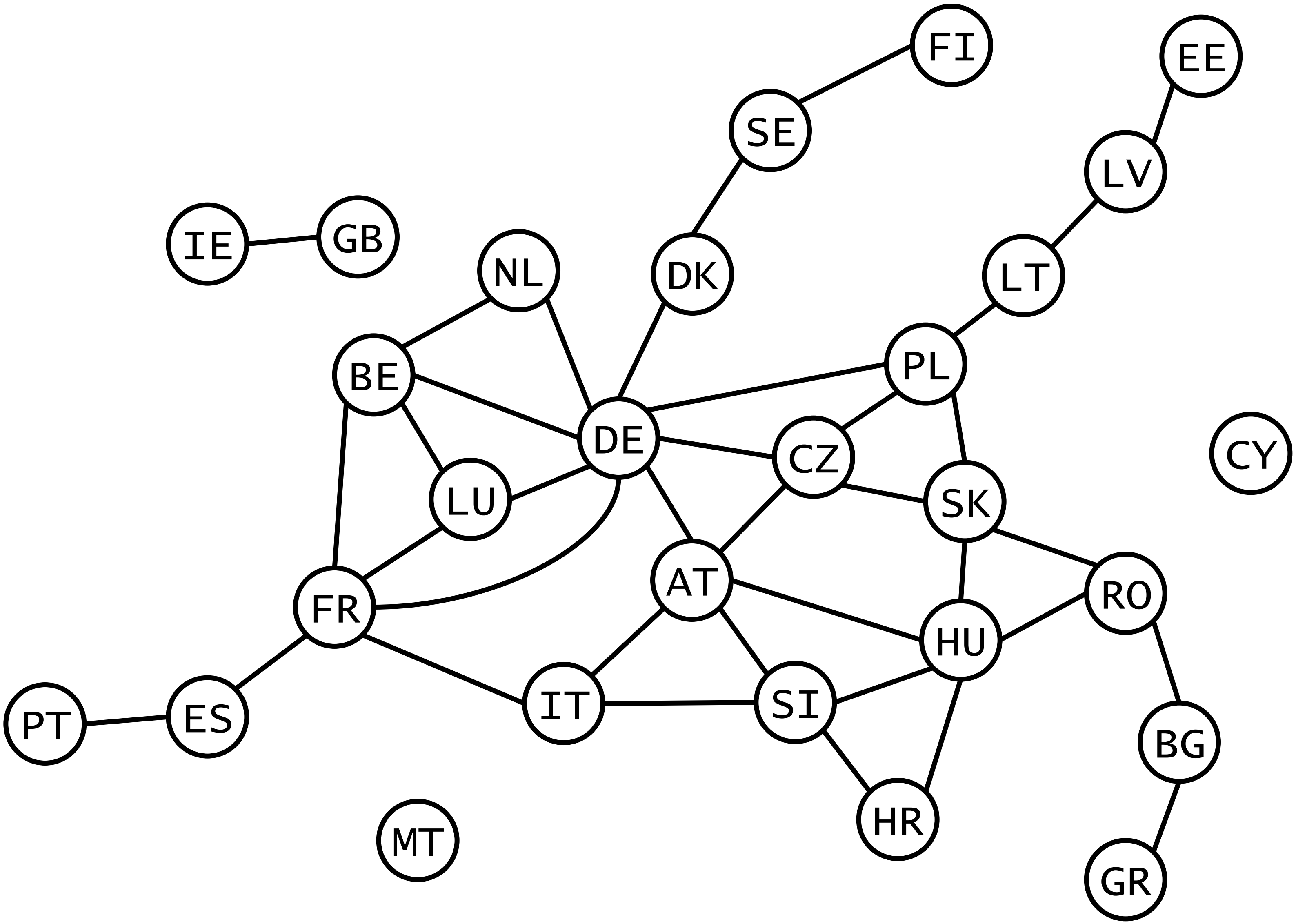
buren in Europa

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Member_States_of_the_European_Union_(polar_stereographic_projection)_EN.svg

buren in Europa



buren in Europa

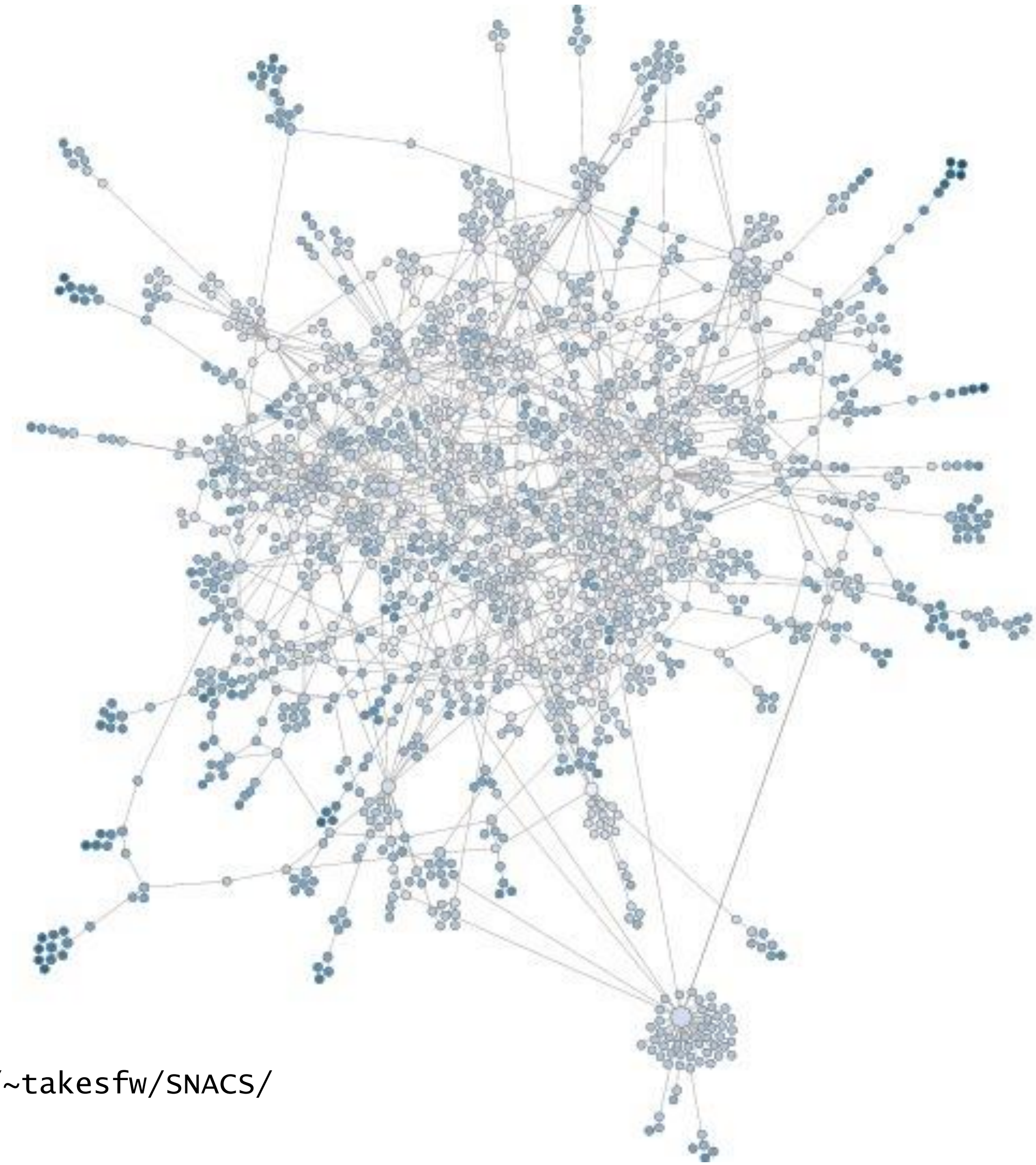


Buren binnen de Europese Unie. Niet helemaal consequent, want de brug tussen Denemarken en Zweden is wel opgenomen, maar de tunnel tussen Frankrijk en Groot-Brittannië niet.

De abstractie van dit schema heet een graaf; grootte, ligging en afstanden doen niet meer ter zake.

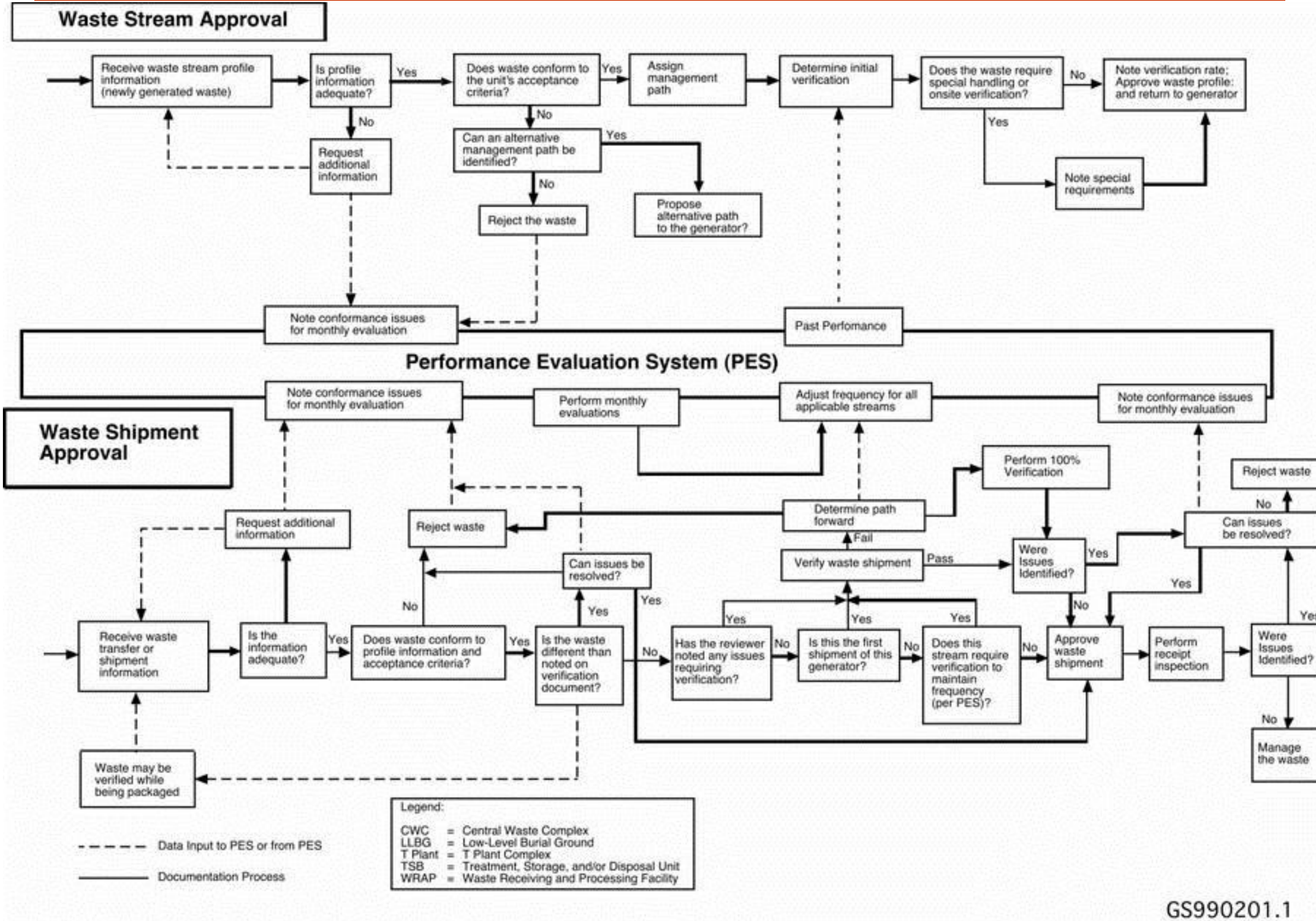
De verbindingen in dit voorbeeld hebben geen richting, en ook geen informatie.
Dat is soms anders in de volgende voorbeelden. In de flowchart zijn er *verschillende soorten* verbindingen (al dan niet gestippeld) die bovendien een *richting* hebben. Bij het spoorwegnet bevatten de verbindingen informatie, in dit geval de gemiddelde snelheid van de trein op het traject.

sociaal netwerk



http://liacs.leidenuniv.nl/~takesfw/SNACS/

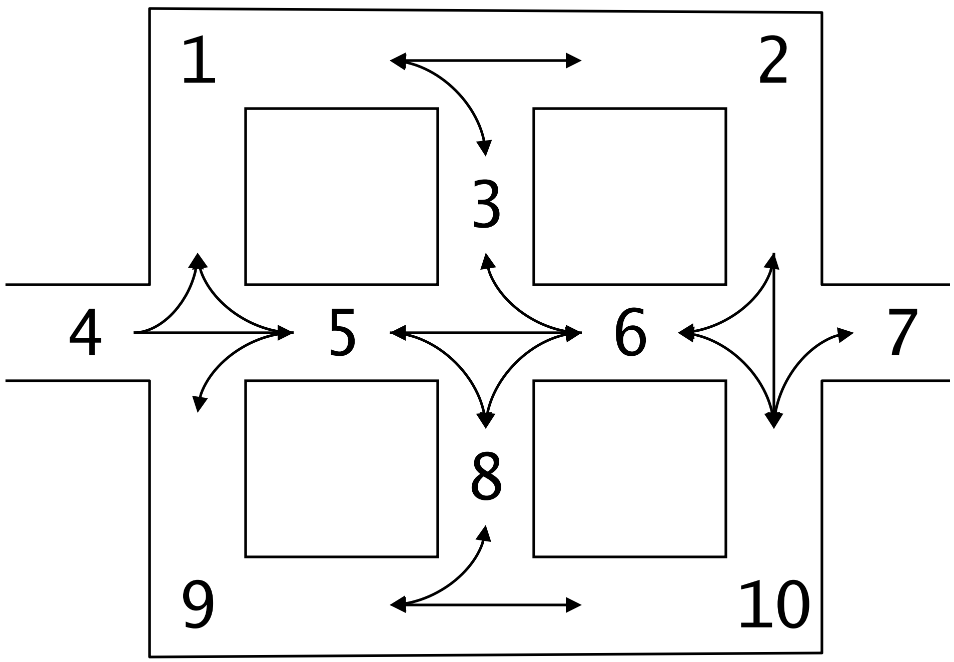
flowchart

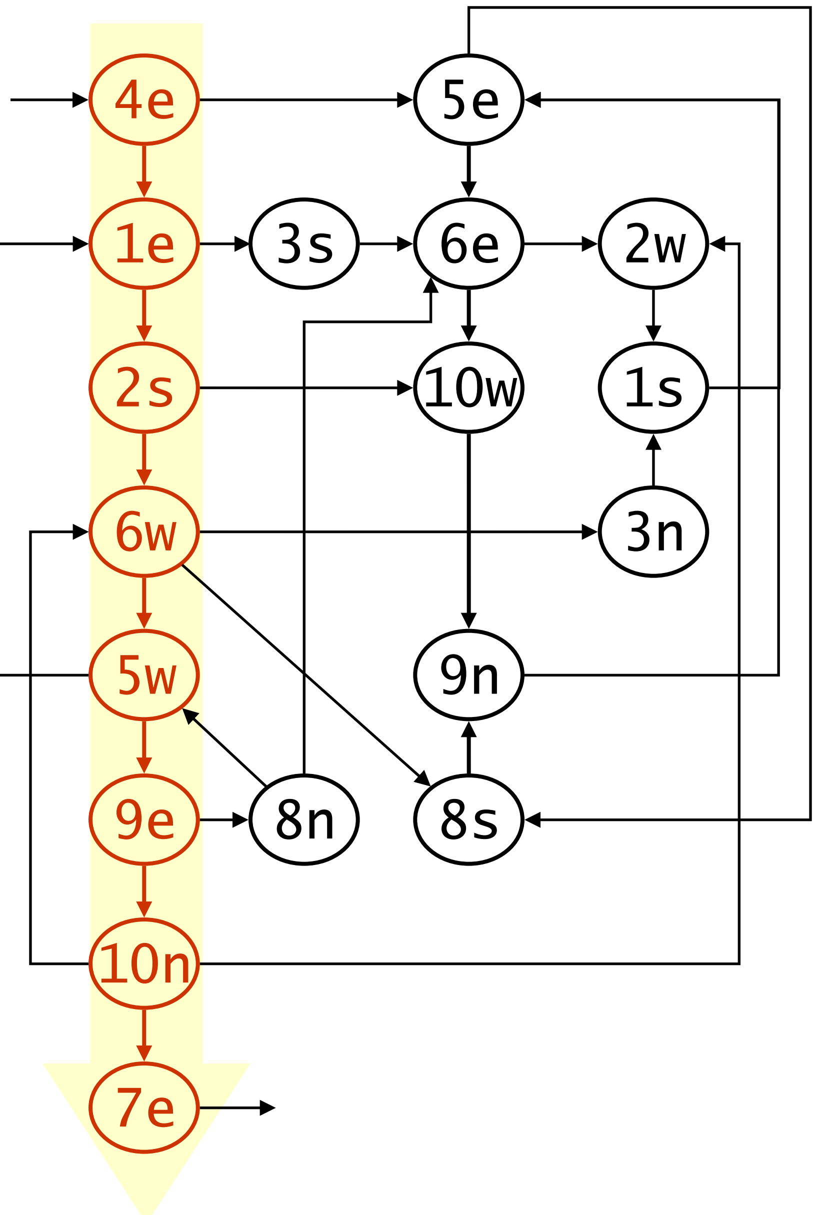

Waste Stream Approval
Receive waste stream profile information (newly generated waste)
Is profile information adequate?
Yes
No
Request additional information
Does waste conform to the unit's acceptance criteria?
Yes
No
Assign management path
Can an alternative management path be identified?
Yes
No
Reject the waste
Propose alternative path to the generator?
Determine initial verification
Does the waste require special handling or onsite verification?
No
Yes
Note verification rate; Approve waste profile: and return to generator
Note special requirements
Note conformance issues for monthly evaluation
Past Perfomance
Performance Evaluation System (PES)
Note conformance issues for monthly evaluation
Perform monthly evaluations
Adjust frequency for all applicable streams
Note conformance issues for monthly evaluation
Waste Shipment Approval
Perform 100% Verification
Reject waste
Request additional information
Reject waste
Determine path forward
Fail
Can issues be resolved?
Verify waste shipment
Pass
Were Issues Identified?
Yes
No
Can issues be resolved?
No
Yes
Receive waste transfer or shipment information
Is the information adequate?
Yes
Does waste conform to profile information and acceptance criteria?
Yes
No
Is the waste different than noted on verification document?
Yes
No
Has the reviewer noted any issues requiring verification?
Yes
No
Is this the first shipment of this generator?
Yes
No
Does this stream require verification to maintain frequency (per PES)?
Yes
No
Approve waste shipment
Perform receipt inspection
Were Issues Identified?
Yes
No
Manage the waste
Waste may be verified while being packaged
Data Input to PES or from PES
Documentation Process
Legend:
CWC = Central Waste Complex
LLBG = Low-Level Burial Ground
T Plant = T Plant Complex
TSB = Treatment, Storage, and/or Disposal Unit
WRAP = Waste Receiving and Processing Facility
GS990201.1

baanvaksnelheden

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Baanvaksnelheden.png

toestand-actie-ruimte





Farmer Goes to Market maze. By Robert Abbott.
http://www.mathpuzzle.com/MAA : multi-state mazes

toestand-actie-ruimte

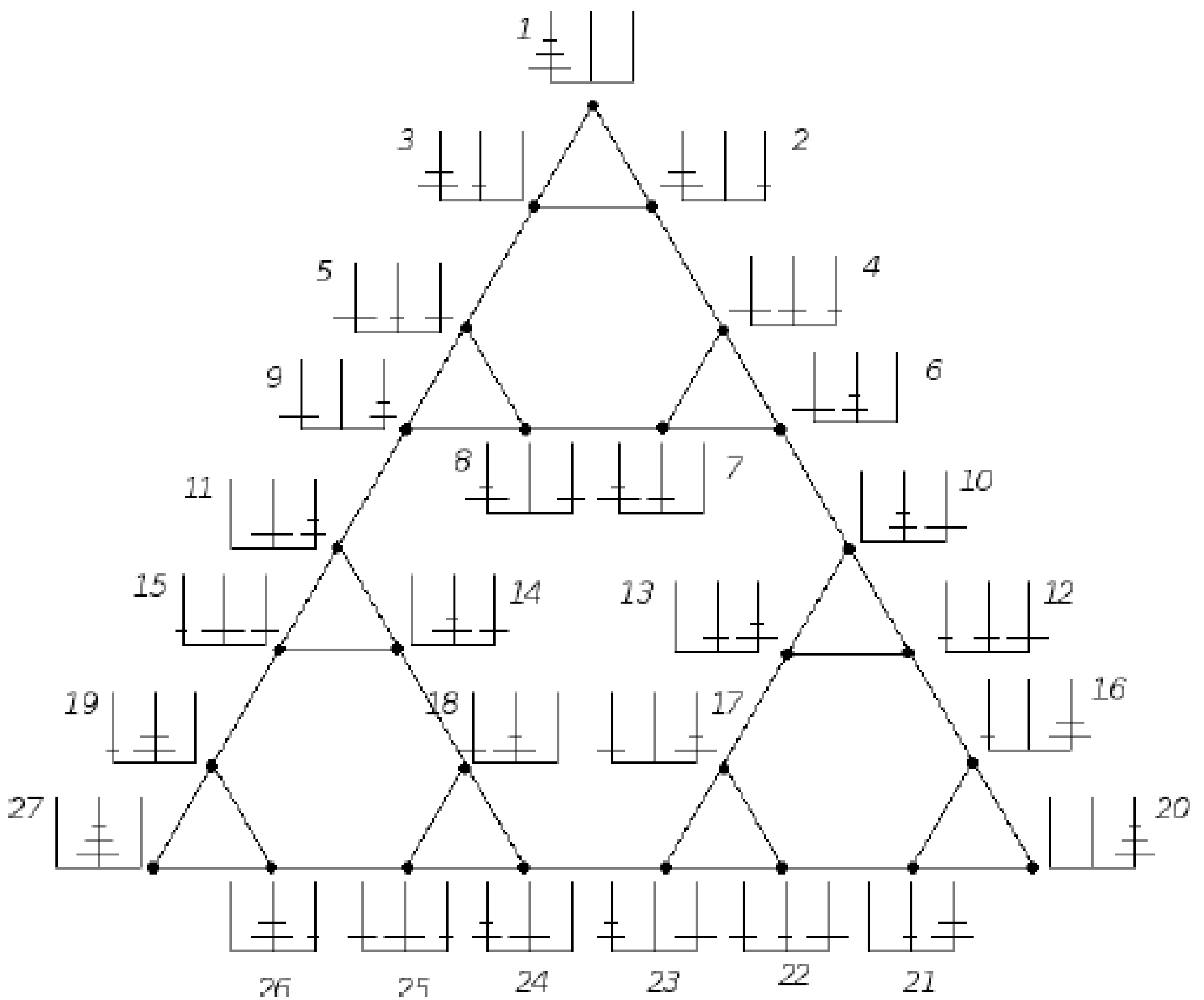
Probleem: hoe komt de boer met zijn kar met lading naar de markt, *zonder te keren*, en alleen via de aangewezen afslagen?

De “state chart”, ofwel toestand-actie-diagram of *toestand-actie-ruimte*, geeft de toestanden van een probleem en de overgangen daartussen. Begrip bij het college Algoritmiek.

Hier is het oorspronkelijke probleem eigenlijk al een graaf, maar in het toestand-actie-diagram moeten nog extra de twee richtingen worden onderscheiden die de kar kan hebben op elk punt.

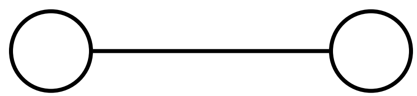
Het volgende voorbeeld geeft het toestand-actie-diagram voor de puzzel Torens van Hanoi. Sheet uit het college Algoritmiek.

Algoritmiek 2016/03 **Toestand-actie-ruimte $n = 3$**



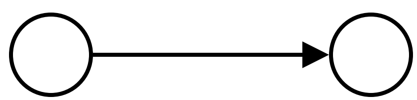
grafen

Schaum:



ongericht

Ch.8 Graph Theory



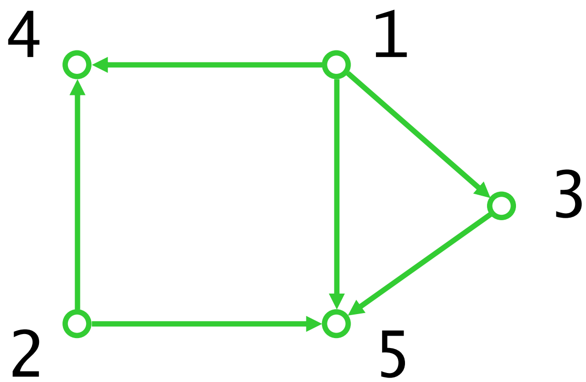
gericht

Ch.9 Directed Graphs

Ch.10 Binary Trees

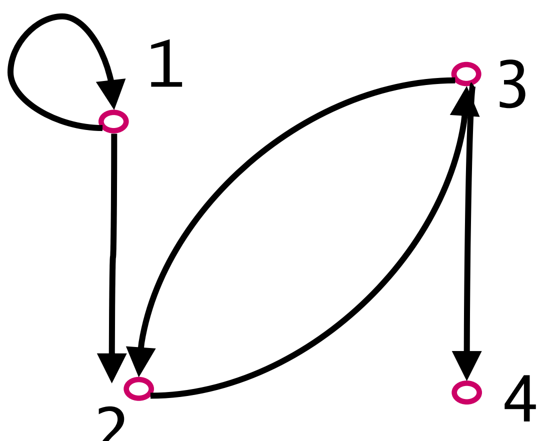
Komt later

gerichte grafen en relaties



$$\begin{array}{cc} & j \\ & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{matrix} \\ i \;\; \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

Een binaire relatie in A kunnen we weergeven middels een *gerichte graaf* of een matrix: Schaum H9



$$\begin{array}{cc} & j \\ & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\end{matrix} \\ i \;\; \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

ongerichte grafen

We zagen voorbeelden van gerichte (flow chart) en ongerichte grafen (spoorwegnet). Gerichte grafen kwamen we ook al tegen bij relaties.

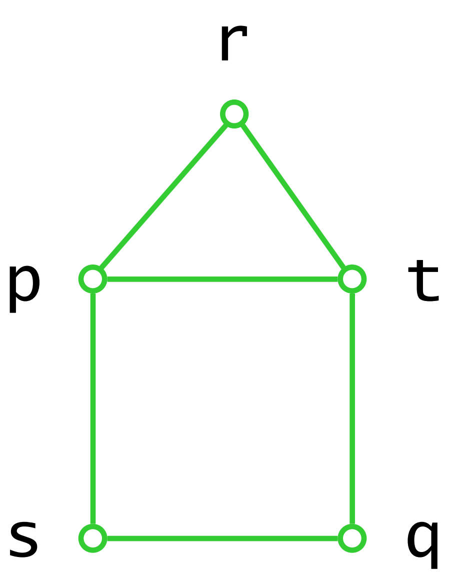
Eerst behandelen we ongerichte grafen (H8 in Schaum), daarna gerichte grafen (H9 in Schaum). Ongerichte grafen zullen we vaak gewoon ‘grafen’ noemen.
Een boom is een speciaal soort graaf. Bomen komen later bij dit vak in een apart college aan de orde.

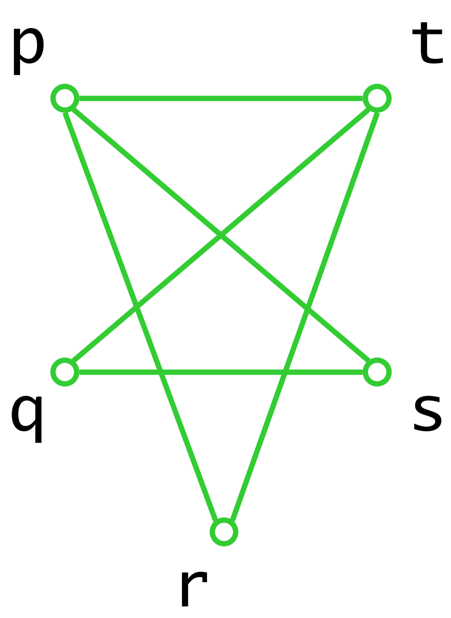
§8.2 grafen en multigrafen (*)

Een graaf G bestaat uit twee (eindige) verzamelingen
- V = V(G) knopen (punten; vertices, nodes, points)
- E = E(G) lijnen (*takken*, zijden, kanten, bogen; edges)

lijn ~ *ongeordend* tweetal (verschillende) knopen uit V

e = {u,v} lijn (of tak) *tussen* u en v





G = G(V,E)

V = {p,q,r,s,t}

E = { {p,r}, {p,t}, {p,s}, {q,s}, {q,t}, {r,t} }

eindige graaf

(*) ongericht!

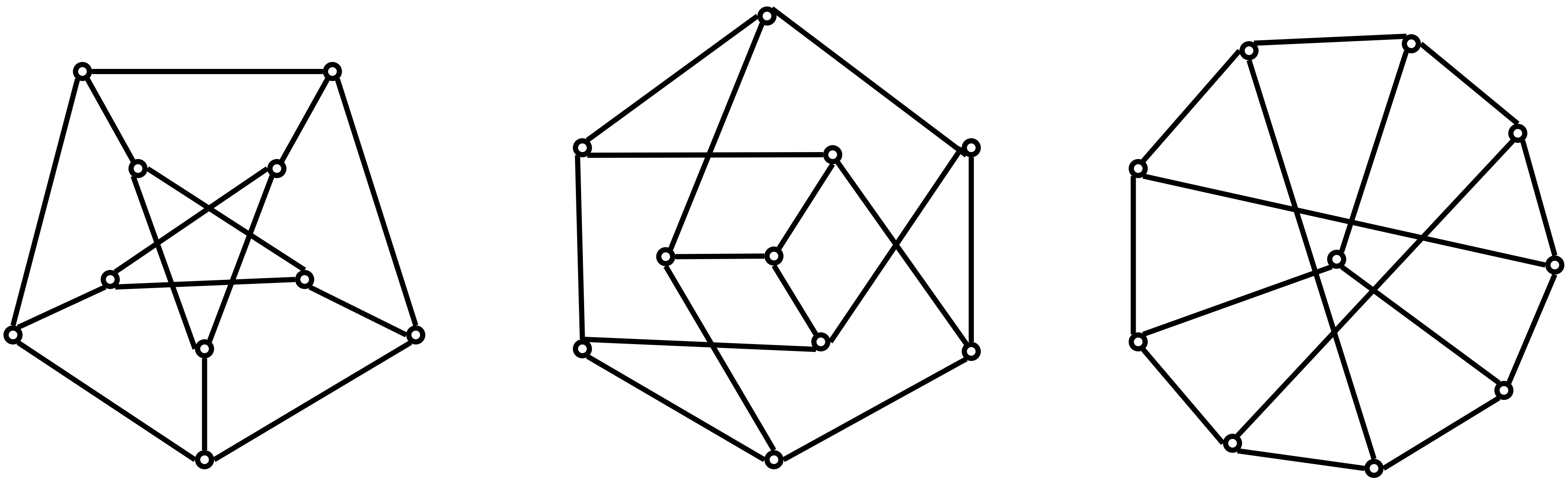
grafen en multigrafen

Grafen in dit college zijn steeds eindig. In hoofdstuk 8 bekijken we ongerichte grafen, in hoofdstuk 9 gerichte grafen.

Volgens Schaum (pagina 158) zijn ook in het boek de grafen eindig, tenzij expliciet anders vermeld. Veel stellingen over grafen gelden alleen in het eindige geval.

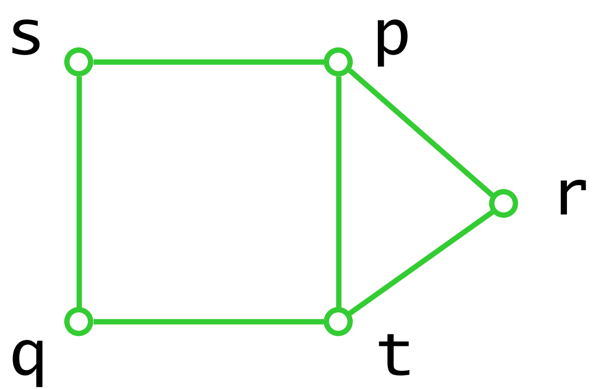
Uit de definitie volgt dat een graaf geen meervoudige takken heeft (E is een *verzameling*) en ook geen lussen (takken zijn *verzamelingen*). Zie verderop bij multigrafen.

Petersen-graaf



steeds *dezelfde* graaf, anders weergegeven

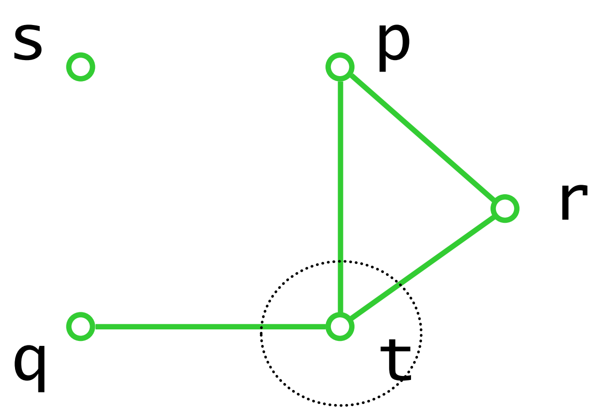
G = G(V,E) = (V,E)
e = {u,v}
e verbindt u en v
uiteinde
incidentie (punt&lijn)
buur (adjacent)



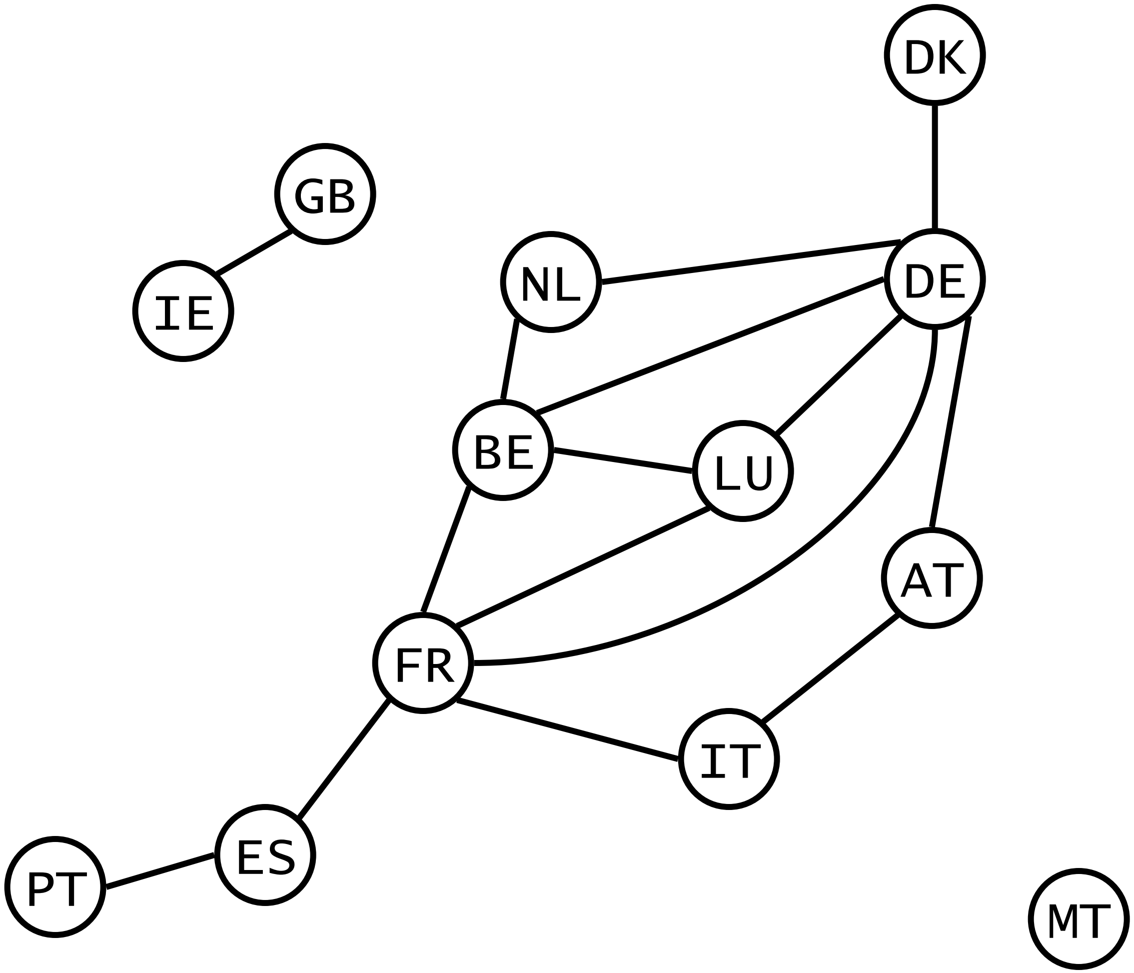
graad van punt v: aantal incidenties deg(v)

Een knoop v heet een
geïsoleerd punt als
deg(v)=0

knoop t heeft graad 3
en buren p, q en r



oefenen …



handshaking lemma

Theorem 8.1

De som der graden is twee keer het aantal lijnen.

In een graaf $G = (V,E)$ geldt
$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$.

Gevolg

Het aantal punten met oneven graad is even.

§8.11 adjacencymatrix

$G = (V,E)$ met $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. ordening!

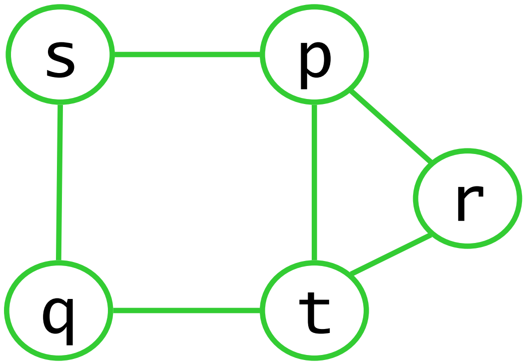
burenmatrix, verbindingsmatrix, incidentiematrix

nxn-matrix $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } v_i \text{ en } v_j \text{ verbonden zijn} \\ 0 & \text{in de overige gevallen} \end{cases}$$

adjacency matrix ongerichte graaf

- symmetrisch
- nullen op diagonaal



naar

$$\begin{array}{ll} & \quad p,q,r,s,t \\ \text{van} \quad \begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

ordening!

Merk op dat we bij een matrix-representatie van de graaf de knopen in één of andere volgorde moeten opnoemen.

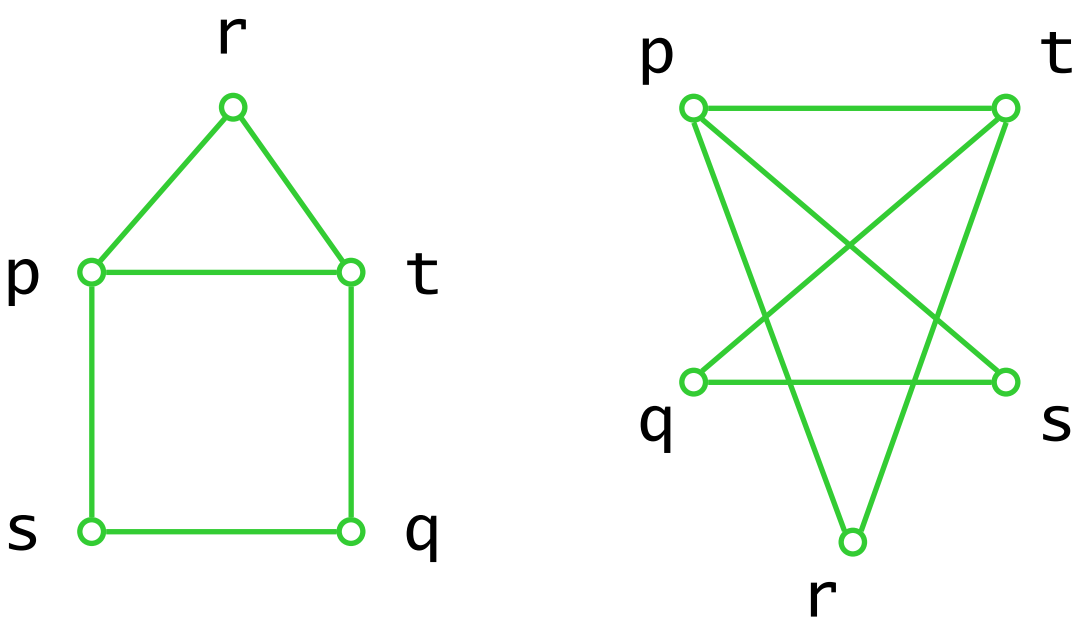
In het abstracte begrip graaf is er geen automatische (vanzelfsprekende) volgorde op de knopen: V is een verzameling en dus ongeordend.

gelijk versus isomorf

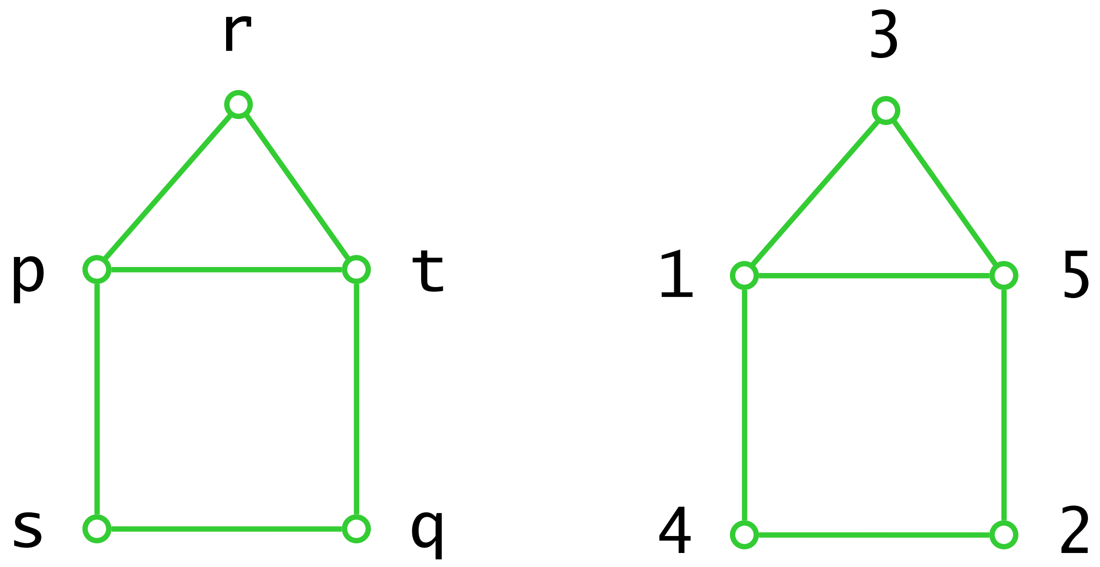
Twee (plaatjes) van grafen kunnen gelijk zijn ook al zien ze er anders uit.

Twee grafen die er hetzelfde uitzien kunnen (toch) verschillend zijn als hun knopen andere namen hebben. Dat leidt tot een speciaal begrip ‘isomorfisme’, feitelijk niet meer dan het hernoemen van de knopen (terwijl alle andere eigenschappen gelijk blijven).

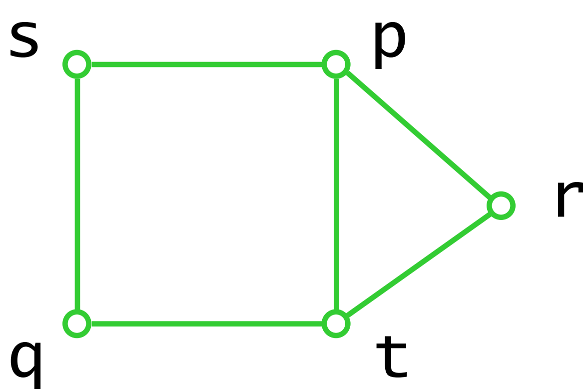
gelijke grafen

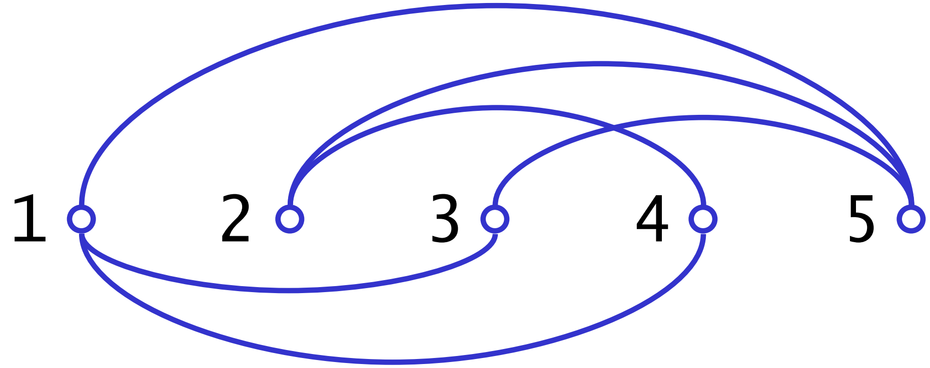


V = {p,q,r,s,t}
E = { {p,r},{p,t},{p,s},{r,t},{q,t},{s,q} }



p↔1 q↔2 r↔3 s↔4 t↔5

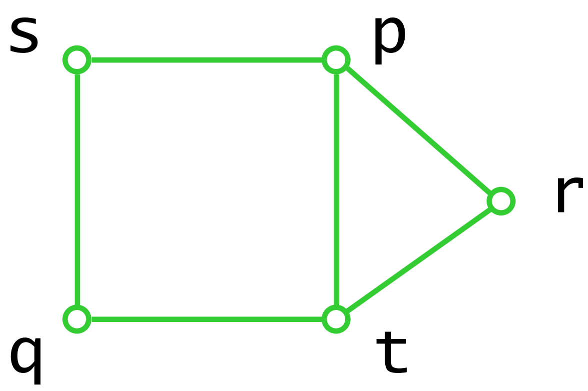


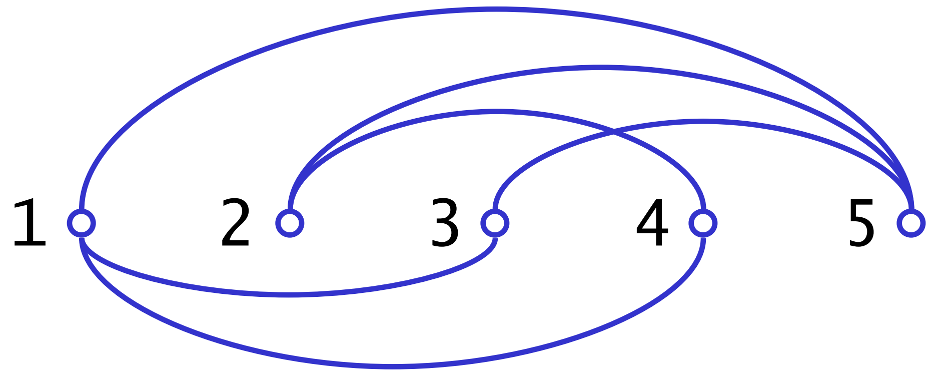


V = {p,q,r,s,t}
E = {pr,ps,pt,qs,qt,rt}
= { {p,r},{p,s},{p,t},
{q,s},{q,t},{r,t} }

V' = {1,2,3,4,5}
E' = { {i,j} | j≥i+2 }
= { {1,3},{1,4},{1,5},
{2,4},{2,5}, {3,5} }

p↔1 q↔2 r↔3 s↔4 t↔5



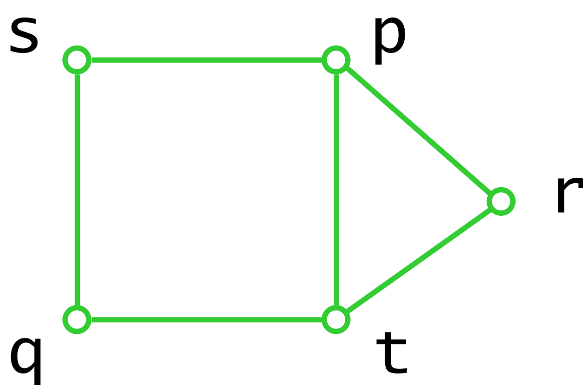


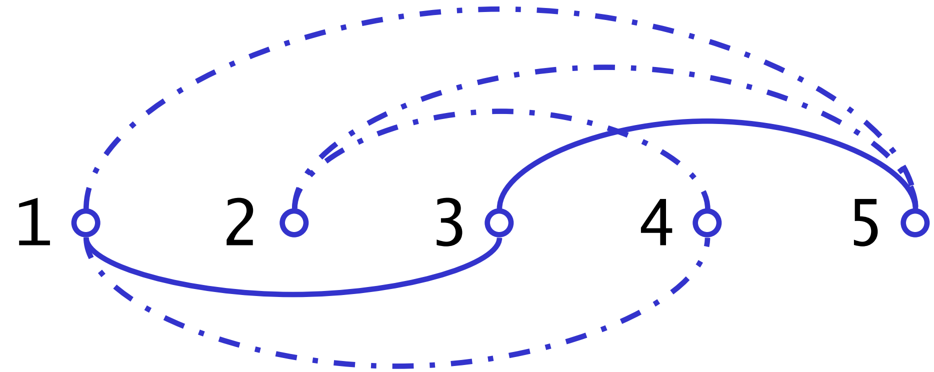
V = {p,q,r,s,t}
E = {pr,ps,pt,qs,qt,rt}

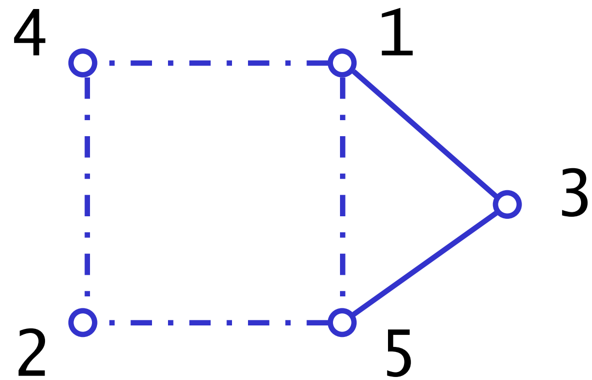
V' = {1,2,3,4,5}
E' = { {i,j} | j≥i+2 }

Eigenlijk moeten we schrijven:
E = { {p,r},{p,s},{p,t},{q,s},{q,t},{r,t} }
want lijnen worden genoteerd als paren knopen, maar dat wordt wel eens ingekort.

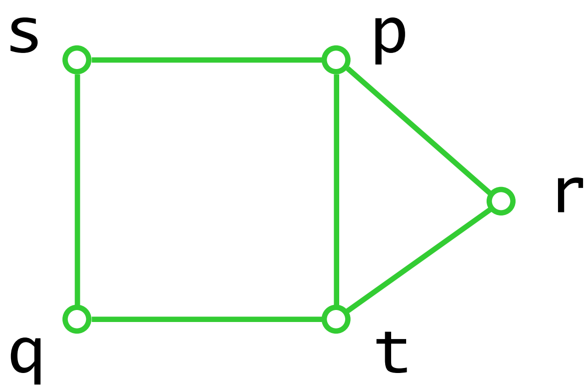
isomorfie

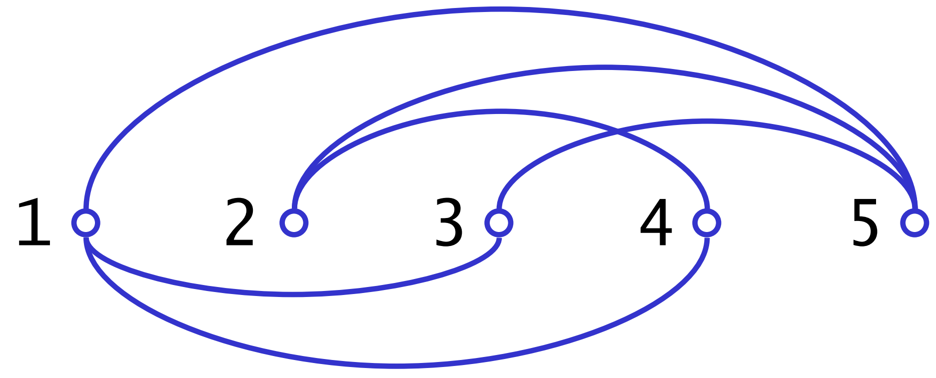






p↔1 q↔2 r↔3 s↔4 t↔5



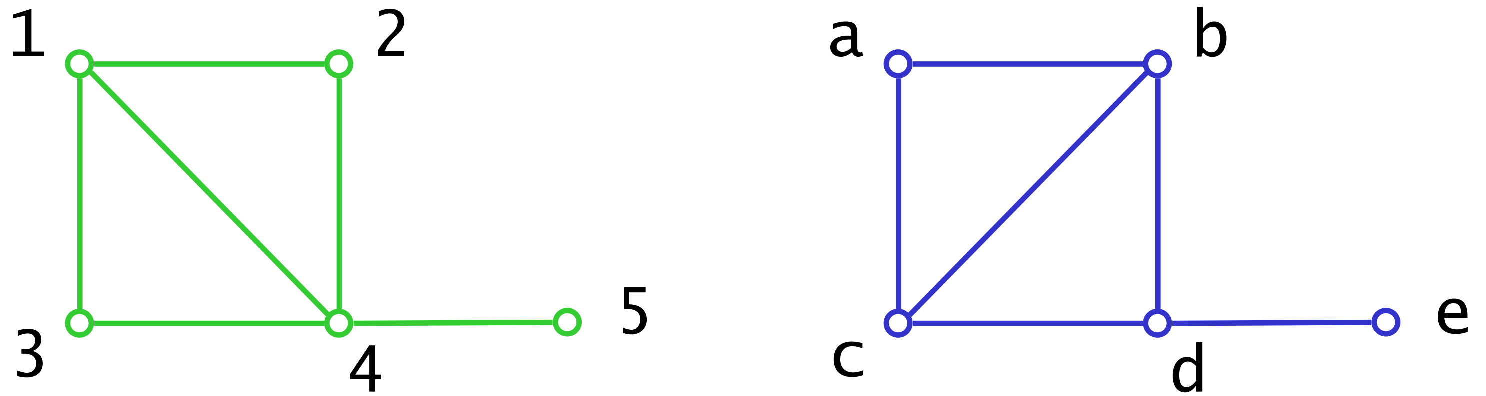


V = {p,q,r,s,t}
E = {pr,ps,pt,qs,qt,rt}

V' = {1,2,3,4,5}
E' = { {i,j} | j≥i+2 }

Formeel: een isomorfisme tussen G(V,E) en G'(V',E') is een *bijectie* f: V → V' met de eigenschap dat {p,q} ∈ E desda {f(p),f(q)} ∈ E'

isomorfie

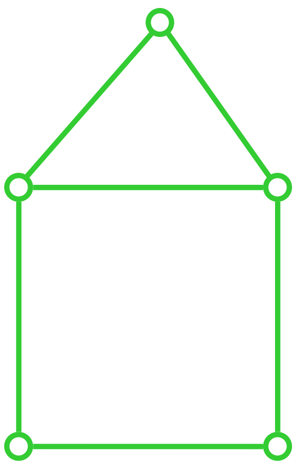


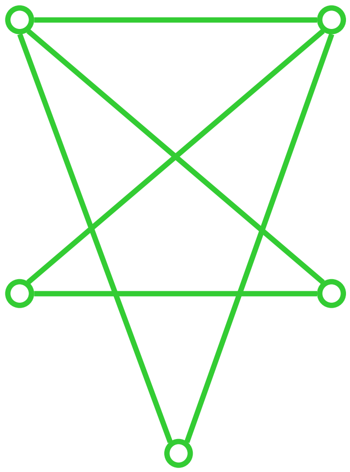
Zijn deze grafen isomorf?

Eigenschappen die bewaard blijven:

- aantallen knopen en lijnen
- aantallen knopen van bepaalde graad
- paden van bepaalde lengte
- …

Als knopen geen naam hebben …

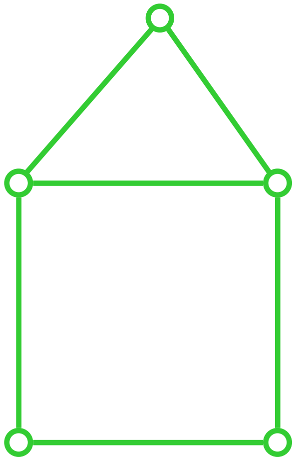


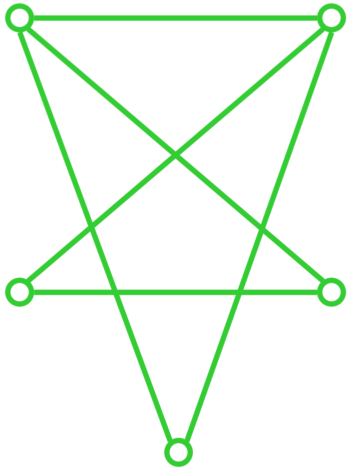


isomorf of gelijk ??

?? grafen

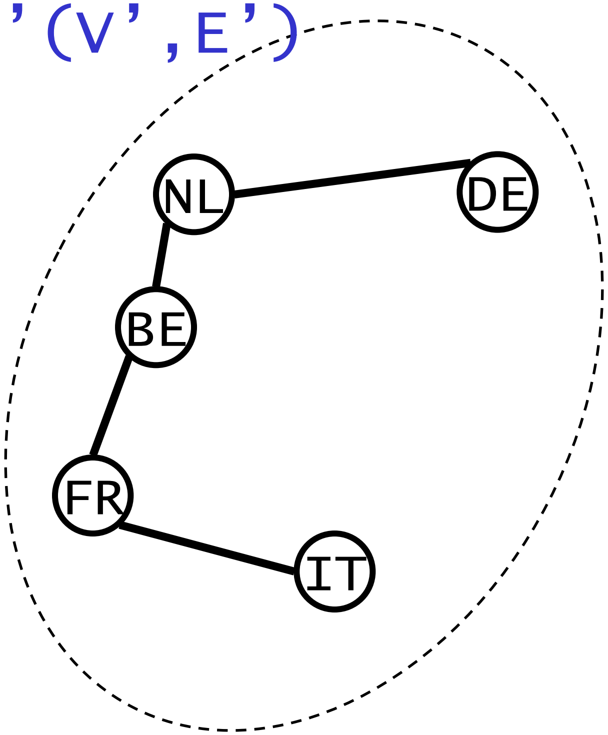
Het is niet helemaal duidelijk of grafen zonder ‘namen’ van de knopen gelijk zijn of isomorf: we kiezen voor isomorf.
Zie Schaum Fig. 8-6.



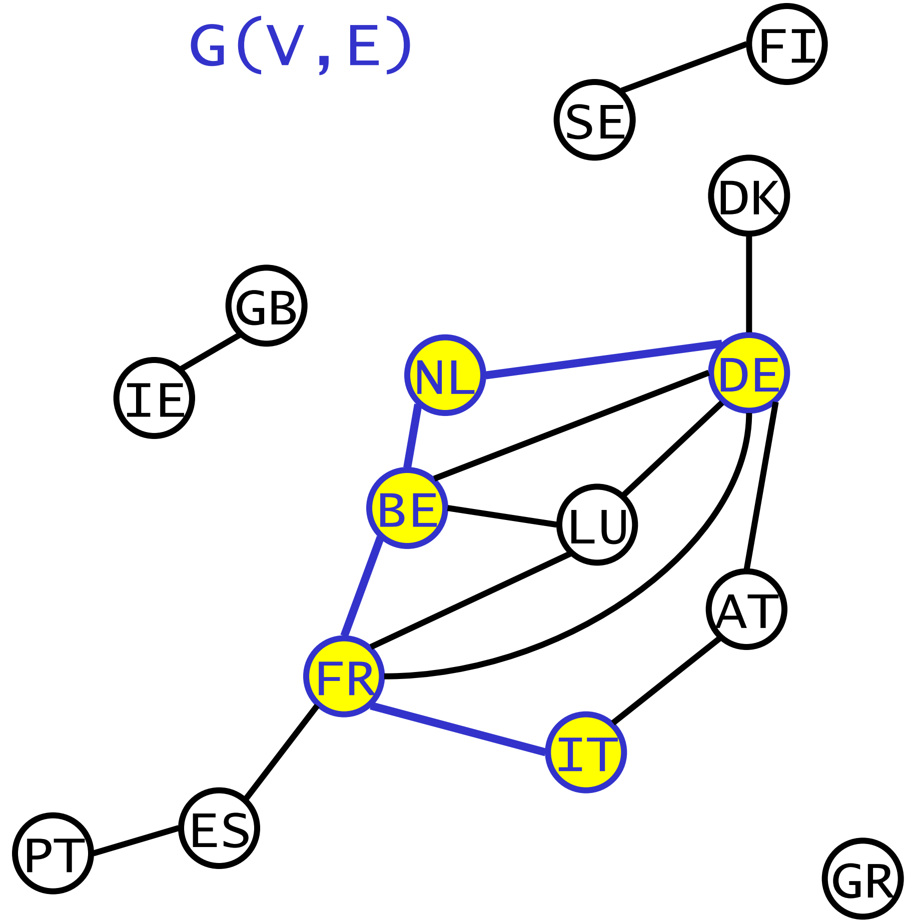


Het begrip homeomorf dat Schaum introduceert zullen we niet behandelen.

$G'(V',E')$



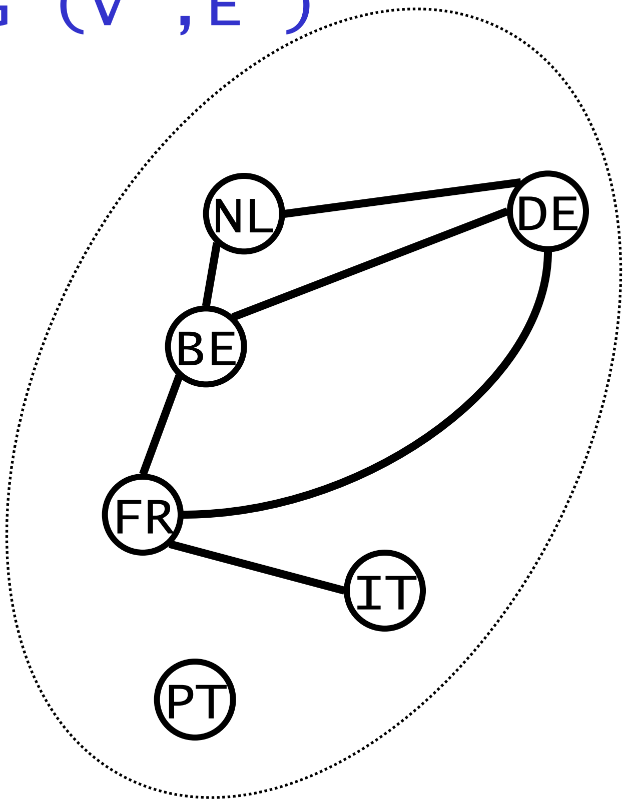
$G(V,E)$



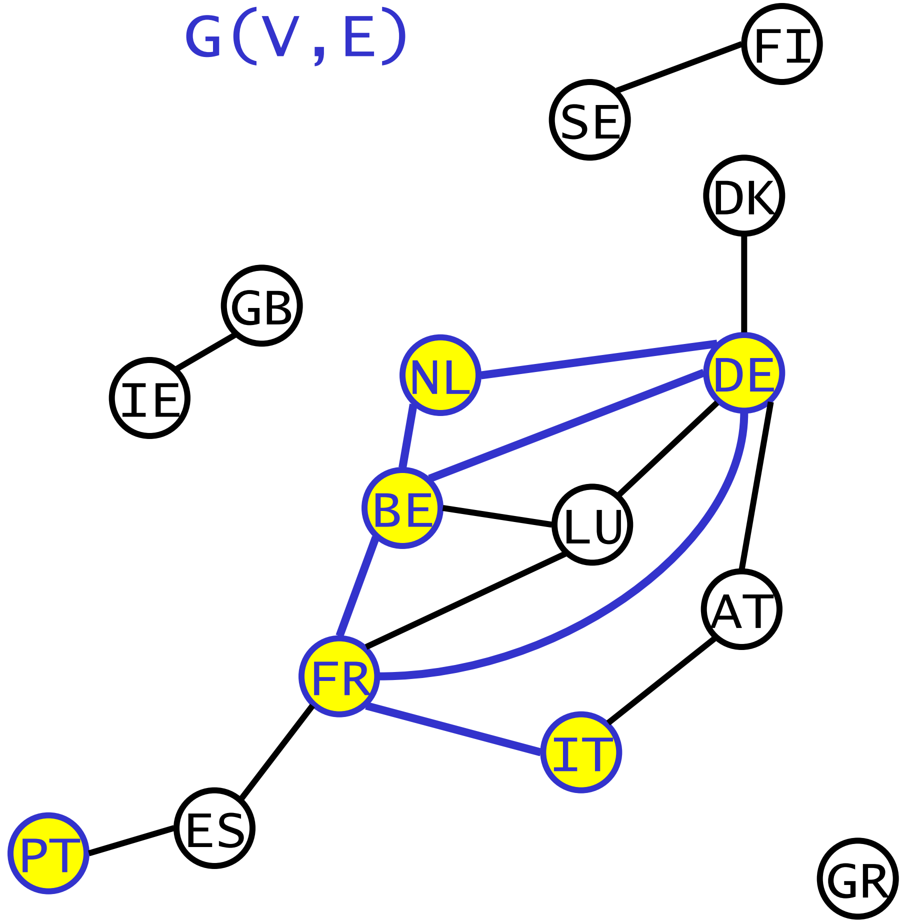
$V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$

geïnduceerde deelgraaf

G'(V',E')



G(V,E)



$V' \subseteq V$,

$E' = \{ \{u,v\} \in E \mid u,v \in V' \}$

geïnduceerde deelgraaf

G'(V',E')   G(V,E)

$V' \subseteq V$,
$E' = \{ \{u,v\} \in E \mid u,v \in V' \}$

Een geïnduceerde deelgraaf wordt bepaald door de gekozen knopen: *alle* lijnen tussen die knopen uit de oorspronkelijke graaf doen mee.

Bij een (algemene) deelgraaf kunnen minder lijnen gekozen worden dan die door de knopen bepaald zijn.

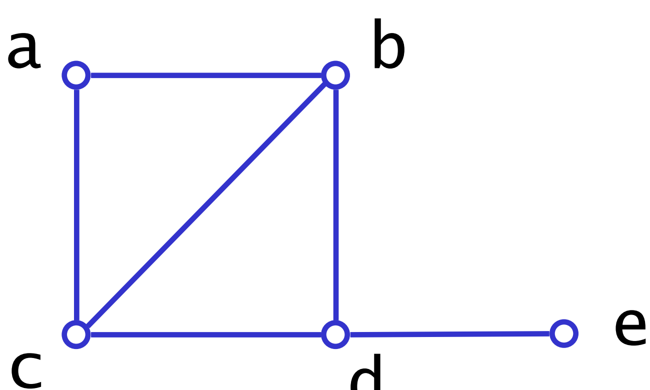
G-v en G-e

G = G(V,E)

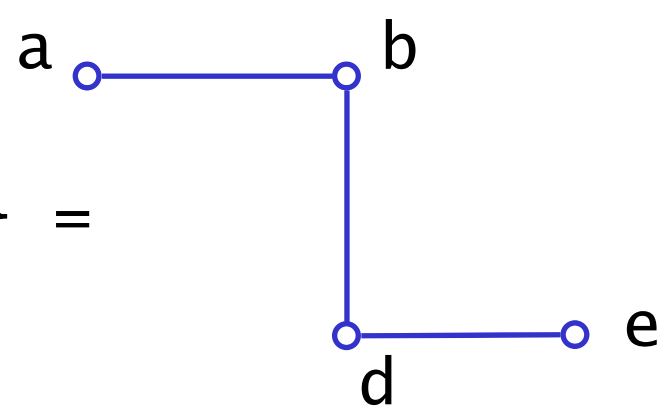
- als v∈V, dan is G-v de graaf die ontstaat als we v en alle lijnen die incident met v zijn uit G verwijderen (ook wel: G-{v})

- als e∈E, dan is G-e de graaf die ontstaat als we e uit G verwijderen (ook wel: G-{e})

G =



G-{c} =

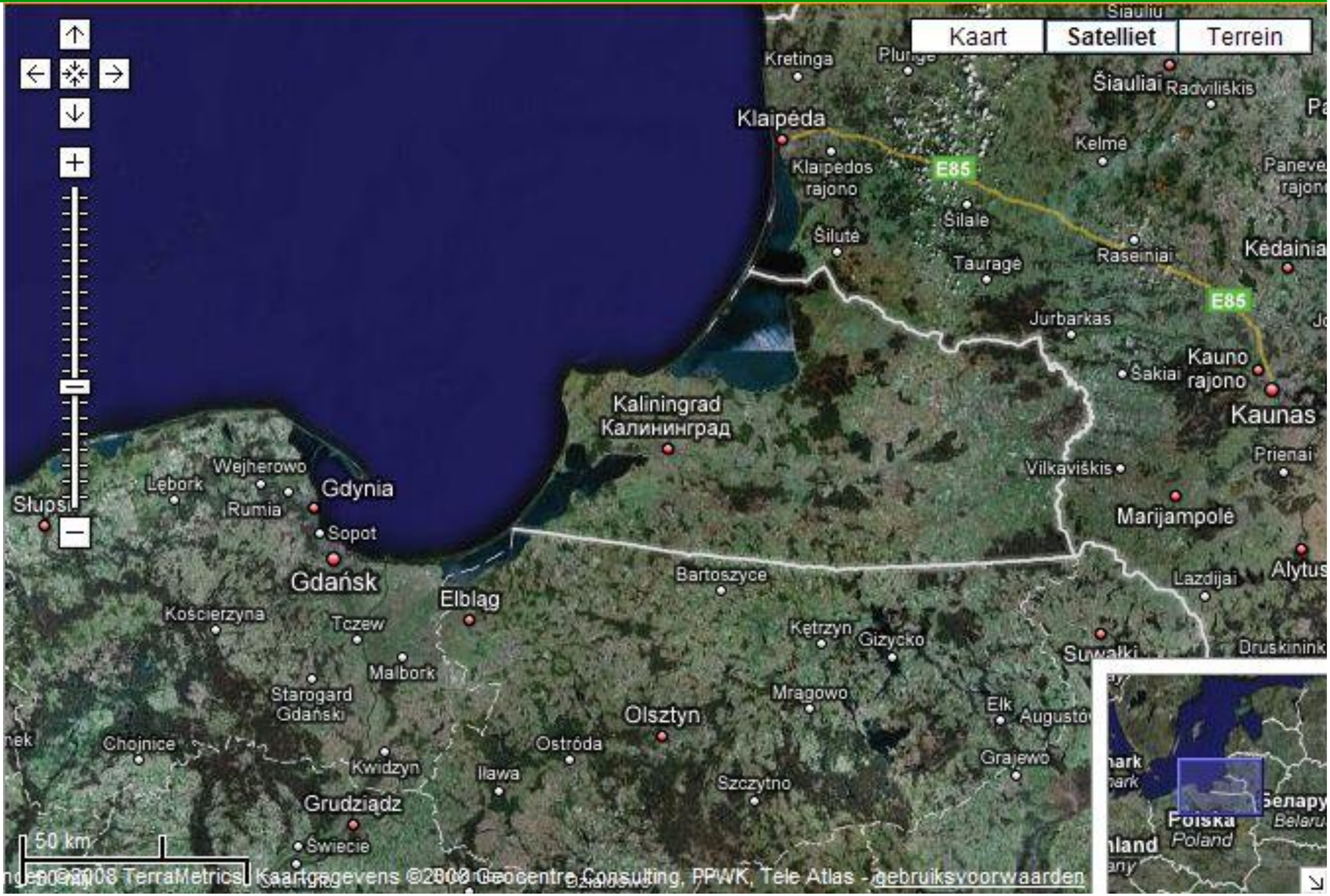


Kaliningrad

Kaliningrad heette vroeger Koningsbergen (Königsberg in Preußen), en ligt aan de rivier de Pregel. Het wordt wel de geboorteplaats van de grafentheorie genoemd omdat de grote geleerde Euler er nadacht of hij een wandeling kon maken die elke brug precies één keer zou aandoen.
Er waren zeven bruggen. Tegenwoordig vijf.

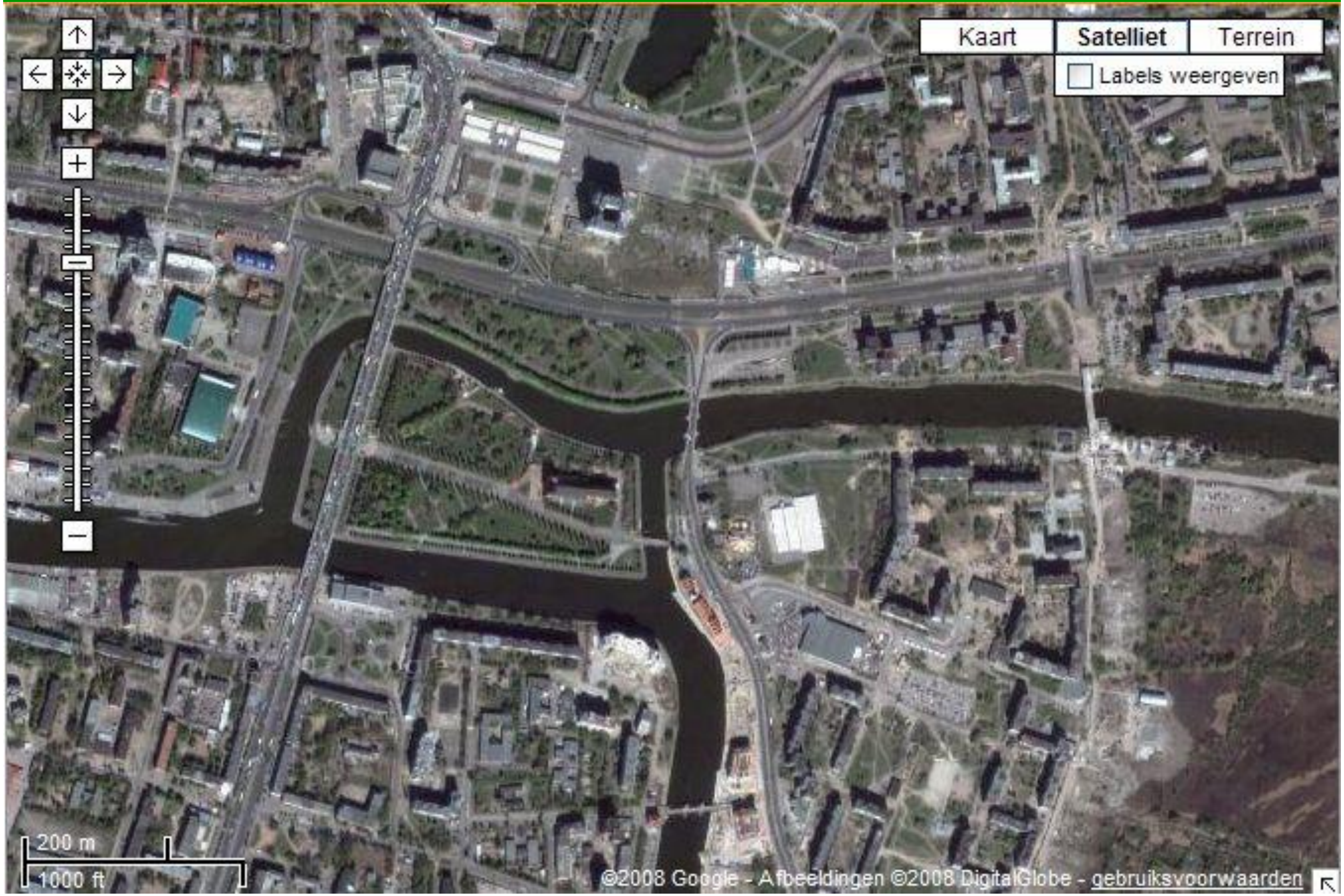
Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8, 1741, 128-140.

Kaliningrad



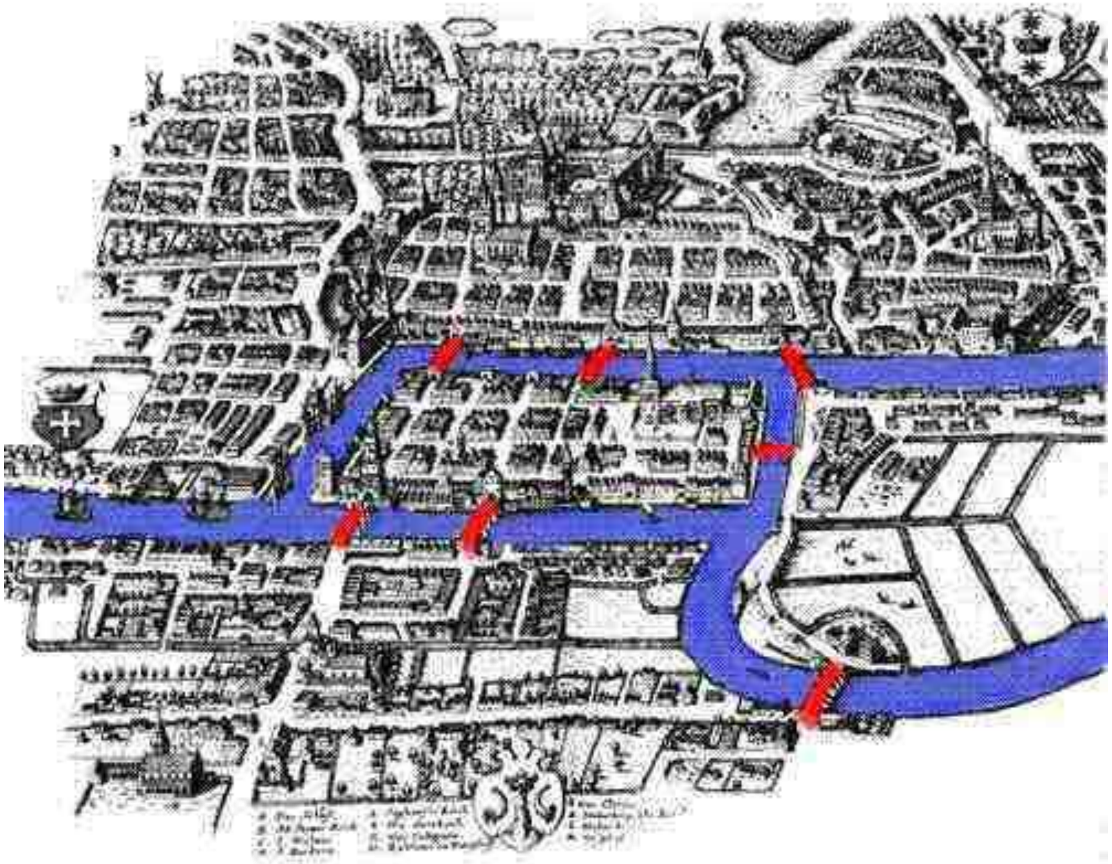
http://maps.google.com/maps?ll=54.716667,20.516667&spn=0.1,0.1&t=h

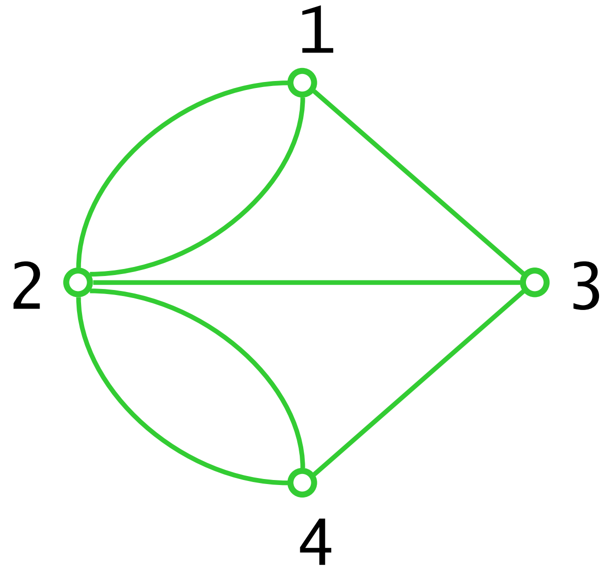
Kaliningrad



multigraaf

- meervoudige lijn
- lus *loop*



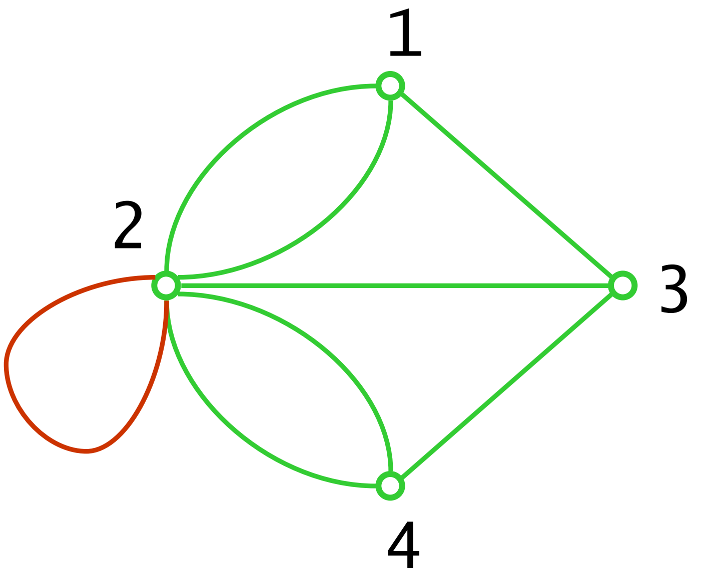


$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M = (m_{ij})$

multigraaf

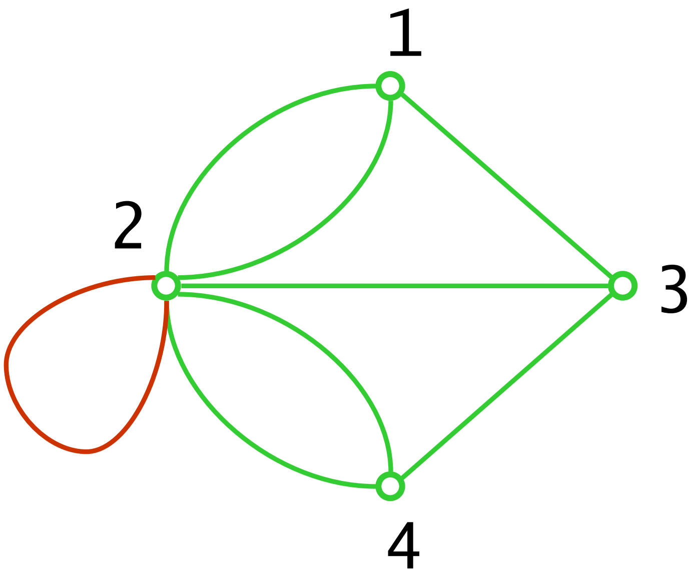
- meervoudige lijn
- lus *loop*



$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = (m_{ij})$$

multigraaf
- meervoudige lijn
- lus *loop*



Waarom is de eerdere definitie van een graaf ongeschikt voor deze begrippen ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

graaf G bestaat uit twee *verzamelingen*
- V = V(G) knopen
- E = E(G) lijnen

lijn is een ongeordend tweetal knopen;
e = {u,v}: *verzameling*

$M = (m_{ij})$

multigraaf

Een multigraaf is een heel natuurlijk begrip. Het laat toe dat er meerdere ‘parallelle’ lijnen tussen dezelfde twee knopen lopen. Dat past echter niet makkelijk in onze definitie van graaf: de lijnen vormen een *verzameling* en de elementen daarvan kunnen niet twee keer in die verzameling zitten. Ook een lus (lijn met gelijk begin- en eindpunt) past niet. Een lijn bestaat uit een *verzameling* met twee knopen. Die dus verschillend moeten zijn (volgens de oorspronkelijke definitie).

Daar is allemaal wel een mouw aan te passen, maar Schaum laat die formalisering achterwege. Wij ook. We doen het met het intuïtieve concept.

Een multigraaf is dus een graaf met (mogelijk) meervoudige takken en lussen.

pad $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$

ook wel: wandeling

$$e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$$

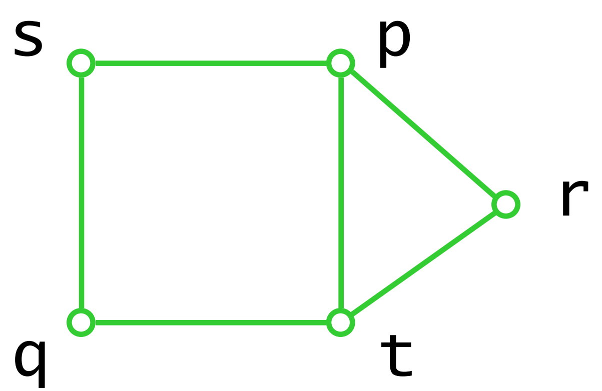
lengte n = aantal lijnen

van v_0 naar v_n

(tussen…, verbindt…)

begin- en eindpunt

gesloten pad $v_0 = v_n$



$(v_0, v_1, \dots, v_n)$

$v_0 \to v_1 \to \dots \to v_n$

$v_0, v_1, \dots, v_n$

$v_0 v_1 \dots v_n$

andere notaties (niet voor multigrafen)

p→t→r→p→s→q→t→p

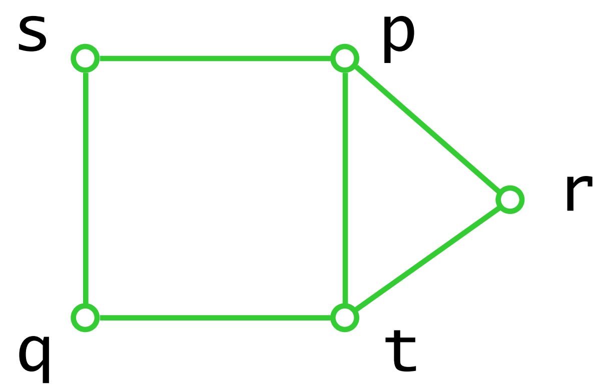
gesloten pad *(kring)*

lengte 7

p,t,r,p,s,q,t,p

pad $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n$

$e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$



simpel pad verschillende v_i
trail verschillende e_i
cykel $n \geq 3$ &
gesloten &
verschillende v_i, behalve $v_0 = v_n$
circuit gesloten trail

In het algemeen noemen we een gesloten pad wel een *kring*. Als de knopen verschillen: cykel; als de lijnen verschillen: circuit

terminologie

In het algemeen noemen we een gesloten pad wel een *kring*. Als de knopen verschillen: cykel; als de lijnen verschillen: circuit

Merk op dat een cykel een speciaal soort circuit is, namelijk een circuit waarin niet alleen de lijnen, maar ook de knopen verschillen.

In het algemeen zijn er grote verschillen in de terminologie die gebruikt wordt voor paden en kringen. Let dus altijd op wat precies bedoeld wordt. Bij dit college hanteren we de definities zoals die op de vorige slide staan. Deze komt overeen met de terminologie die in Schaum wordt gebruikt, al staat het begrip *circuit* daar niet precies gedefinieerd.

College volgende week:
dinsdag 16 oktober,
13.30 – 15.15 in zaal C2 (Gorlaeus)

Werkcollege deze week:
vrijdag 12 oktober,
9.00 - 10.45 in zalen 401, 402, 405, 408 (Snellius)