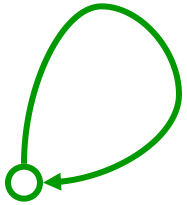
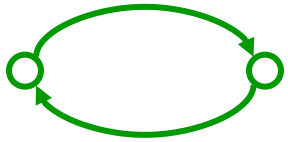
Equivalentie-relaties

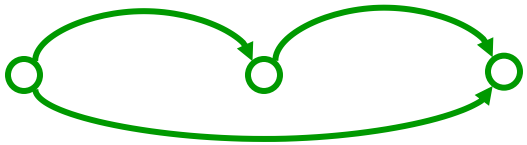
ii

Twaalfde college

vandaag







equivalentie-relaties

reflexief, symmetrisch,
transitief

1. gelijkmachtigheid / aftelbaarheid
2. modulo rekenen
3. theorie

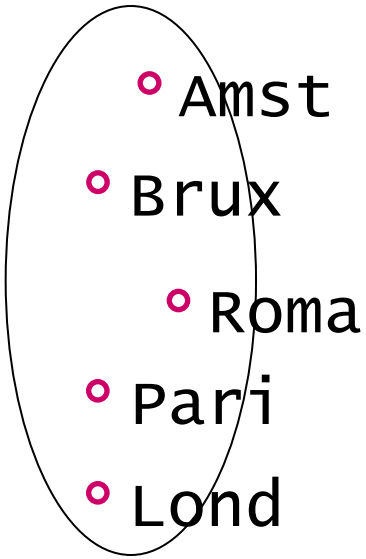
3.7 *Gelijkmachtigheid en aftelbaarheid*

ook: dictaatje §3.2

aleph

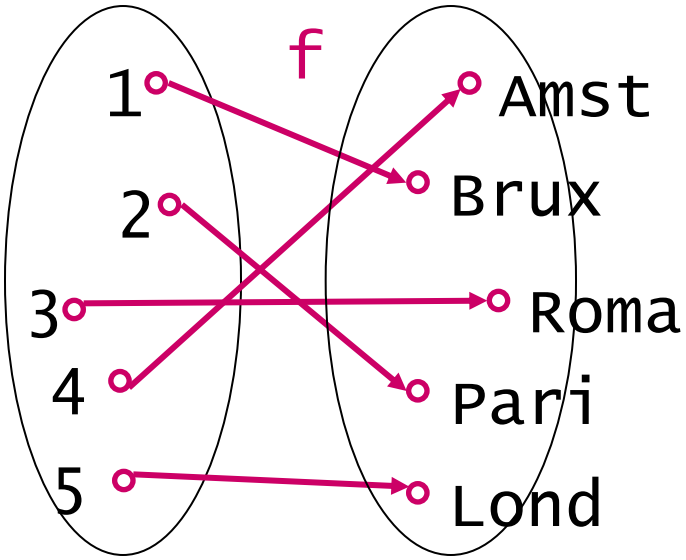
intuïtie

tellen



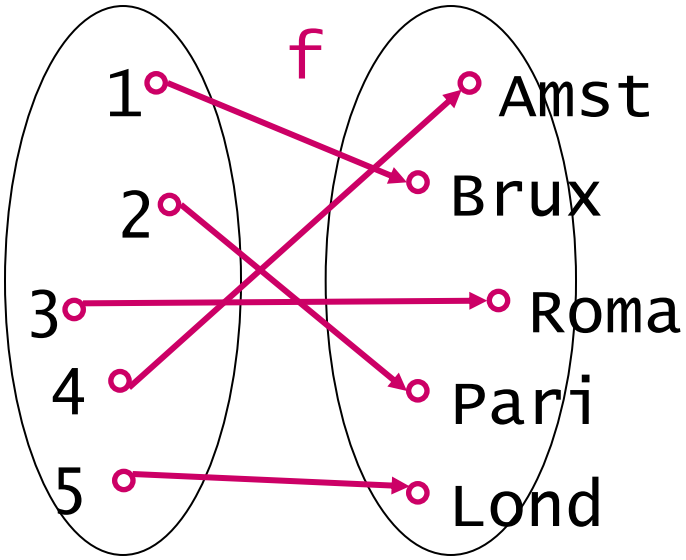
intuïtie

tellen



intuïtie

A eindige verzameling.
tellen van de elementen van A is het geven van een bijectie tussen { 1,2, … ,n } en A.

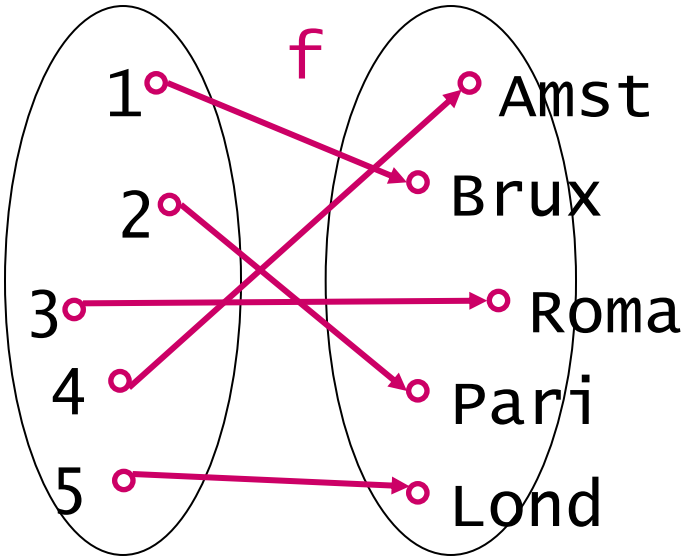


1 → Brux
2 → Pari
3 → Roma
4 → Amst
5 → Lond

Een eindige verzameling A heeft dus n elementen ⇔
er bestaat een bijectie van { 1,2, … ,n } naar A.

intuïtie

A eindige verzameling.
tellen van de elementen van A is het geven van een bijectie tussen { 1,2, … ,n } en A.



1 → Brux
2 → Pari
3 → Roma
4 → Amst
5 → Lond

Hoe zit het met oneindige verzamelingen ?
'meer/evenveel elementen' $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$

Hilberts hotel

oneindig

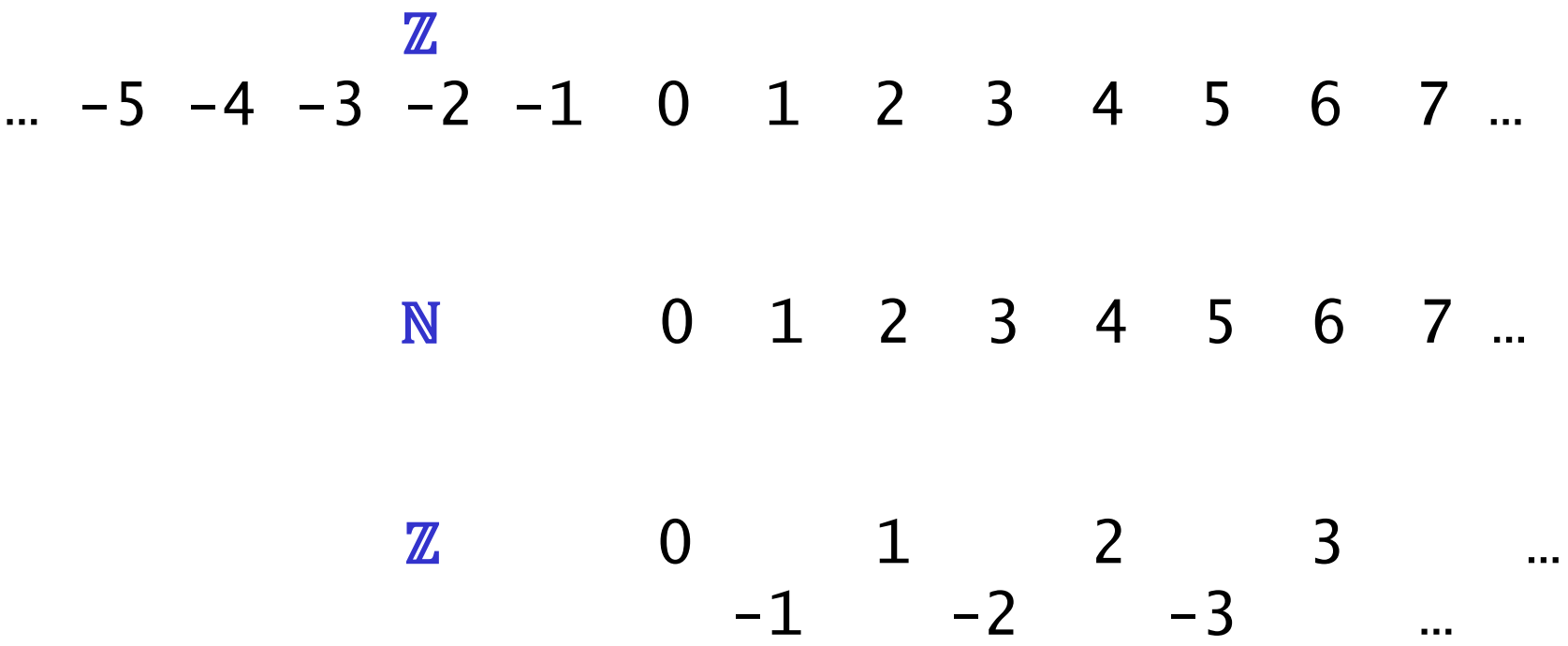
$\mathbb{Z}$

… -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 …

$\mathbb{N}$

0 1 2 3 4 5 6 7 …

oneindig



bijectie tussen ℕ = { 0,1,2,3,… } en ℤ

even

$\mathbb{E}$	0		2		4		6	…
$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7 …
$\mathbb{E}$	0	2	4	6	8	10	…	

Zoiets geldt ook voor de even getallen: dat zijn er minder dan de natuurlijke getallen (gezien als deelverzameling) maar toch evenveel (gezien als gelijkmachtigheid).

gelijkmachtigheid

Twee verzamelingen A en B heten *gelijkmachtig* als er een bijectie tussen A en B bestaat.

Er bestaat een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$
Er bestaat een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en E

$\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$, en $\mathbb{N}$ en E zijn gelijkmachtig

zie ook dictaatje H3 §3.2

op het begrip gelijkmachtigheid komen we straks terug

$\mathbb{Z}$ en E zijn aftelbaar.

oneindig aftelbaar

Er bestaat een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$

$0 \to 0 \quad 1 \to -1 \quad 2 \to 1 \quad 3 \to -2 \quad 4 \to 2 \quad 5 \to -3 \quad 6 \to 3 \quad \ldots$

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even} \\ -(n+1)/2 & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$$

Definitie

Een verzameling A heet *oneindig aftelbaar* als er een bijectie is van $\mathbb{N}$ naar A.
A is *aftelbaar* als A eindig is of oneindig aftelbaar

$\mathbb{Z}$ is aftelbaar.

$\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 …

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	…
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	…
1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	…
1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	…
…	…	…	…	…	…	

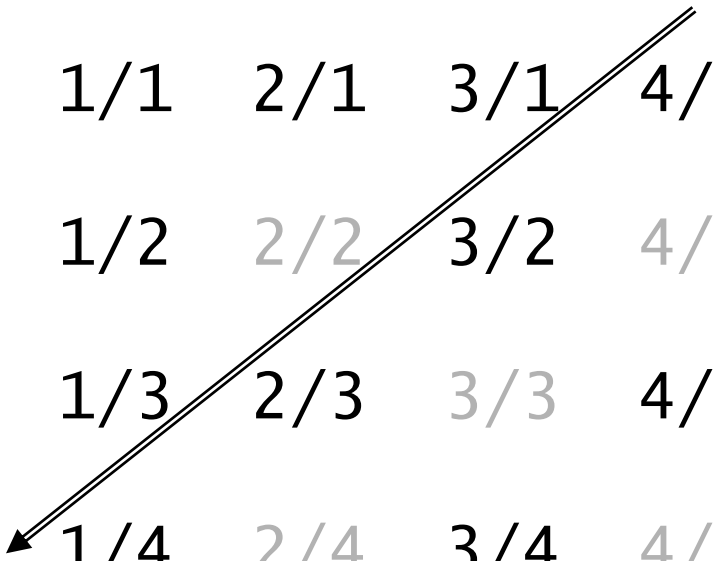
breuken zijn aftelbaar

Er bestaat een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 …

1, 2, 1/2, 3, 1/3, 4, 3/2, 2/3, 1/4, 5, 1/5, 6, 5/2, 4/3,

surjectie vs. bijectie !



1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1 …
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2 …
1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3 …
1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4 …
…	…	…	…	…	

Cantorwandeling

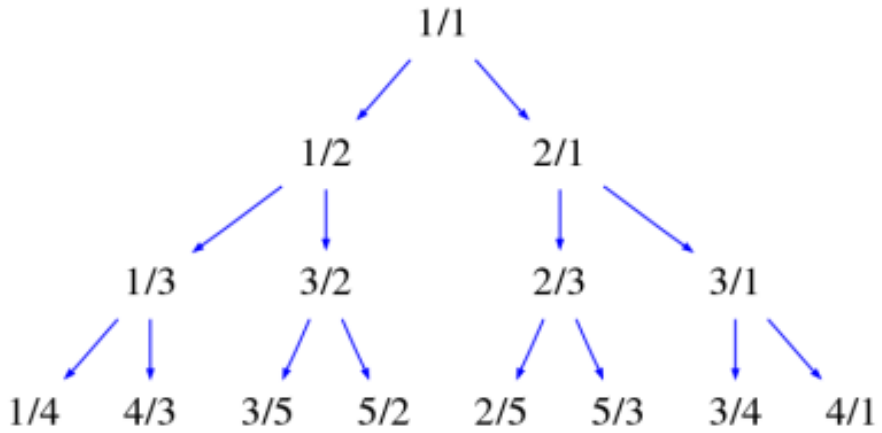
$\mathbb{Q}$ is aftelbaar.

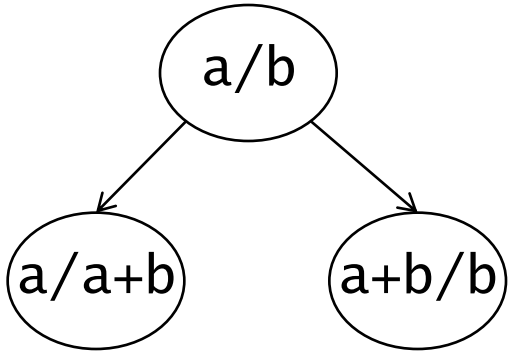
breuken zijn aftelbaar

Er bestaat een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$

Calkin-Wilf. Ander bewijs: oneindige binaire boom waarin elke (positieve) breuk precies één keer voorkomt.

Voordeel: geen herhalingen, toch super-simpel.
Nadeel: hoe weten we die 'precies één keer' ?





Calkin, N. and Wilf, H. S. "Recounting the Rationals." *Amer. Math. Monthly* **107**, 360-363, 2000.

algemener

$f: \mathbb{N} \to A$

zie volgende slides …

formeel: aftelbaar $\Leftrightarrow$ bijectie
surjectie $\approx$ ‘aftelling met herhaling’
máár … herhalingen kun je verwijderen

vereniging van twee aftelbare verzamelingen is ook aftelbaar: om-en-om
(en herhalingen verwijderen)

vereniging van aftelbaar veel aftelbare verzamelingen is ook aftelbaar: Cantor wandeling

generalisatie

surjectie

(oneindig) aftelbaar ⇔ bijectie met ℕ

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	ℕ
0	2	0	4	2	6	4	8	6	4	…	surjectie

van ℕ naar E

Als een surjectie f: ℕ → A bestaat is A aftelbaar

vgl. breuken

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	ℕ
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	…	bijectie

van ℕ naar E

Door herhalingen te verwijderen kun je de surjectie tevens injectief maken

generalisatie

surjectie

Als een surjectie $f: \mathbb{N} \to A$ bestaat is A aftelbaar

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	$\mathbb{N}$
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	…	A eindig

geen bijectie mogelijk !

A aftelbaar $\Leftrightarrow$ A eindig of bijectie met $\mathbb{N}$
A aftelbaar $\Leftrightarrow$ surjectie van $\mathbb{N}$ naar A

generalisatie

surjectie

A aftelbaar:
- eindig
- oneindig: bijectie f: $\mathbb{N} \to A$
  'aftelling' zonder *herhaling* f(0),f(1),f(2), …

Als een surjectie f: $\mathbb{N} \to A$ bestaat is A aftelbaar

Oneindig: bijectie maken door herhalingen te verwijderen

g(0) = f(0)
g(n) = f(i) eerste waarde ongelijk aan g(0),g(1),…, g(n-1)

vgl. breuken

generalisatie

vereniging

$f: \mathbb{N} \to A$ $g: \mathbb{N} \to B$ (bijecties)

A: 1 2 4 5 7 11 13 17 19 23 …

B: 3 5 9 11 15 16 21 23 27 …

Als A en B aftelbaar dan ook $A \cup B$ aftelbaar

$f: \mathbb{N} \to A$ $g: \mathbb{N} \to B$

om-en-om: $f(0), g(0), f(1), g(1), f(2)$, …

0 1 2 3 4 …

geeft i.h.a. een surjectie $h: \mathbb{N} \to A \cup B$

Voor het *voorbeeld*:

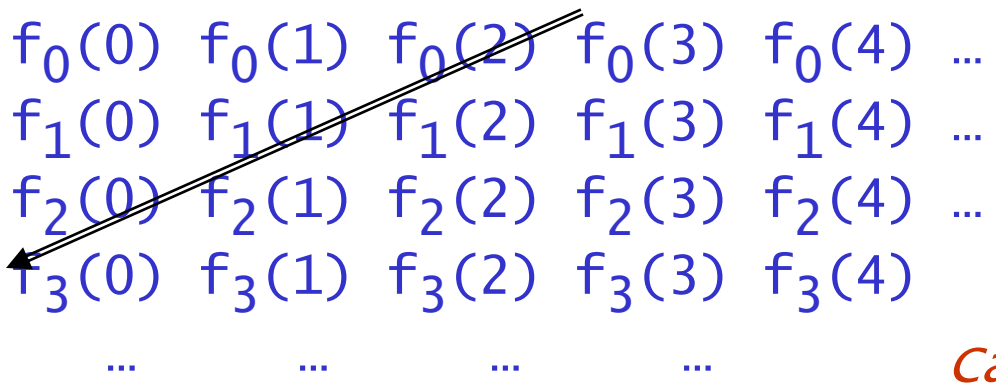
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	$\mathbb{N}$
1	3	2	5	4	9	5	11	7	15	11	…	$A \cup B$

generalisatie

Als A_i aftelbaar dan $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ aftelbaar

vgl. breuken

$f_i : \mathbb{N} \to A_i$



Cantorwandeling

gevolg

Als A_i aftelbaar dan $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ aftelbaar (*)

Gevolg

De collectie van alle *eindige* deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ is aftelbaar

Bewijs 1:
A_i = collectie van alle deelverzamelingen ter grootte i
Dan is A_1 aftelbaar, dus ook A_2 (waarom?), dus ook A_3, etcetera. Derhalve is elke A_i aftelbaar. Volgens (*) is $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ dus aftelbaar.

Bewijs 2:
V_i = collectie van alle deelverzamelingen bestaande uit *hooguit* i elementen, elk met een waarde tussen 0 en i. Elke V_i is eindig (dus aftelbaar) en $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ bevat precies alle eindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$. Pas nu (*) toe.

Vergelijk ook opgave 72c

overaftelbaar

Er bestaat géén bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$

(zonder bewijs)

‘diagonalisatie’

probleempje: 0.9999… = 1 = 1.0000…

m.a.w. $\mathbb{R}$ is niet aftelbaar

Cantor

$\mathbb{R}$ is *over*aftelbaar

diagonalisatie

Men gebruikt “diagonalisatie” om te laten zien dat de reële getallen niet aftelbaar zijn.
Dat heeft technisch een vervelende kant. Je moet eigenlijk weten dat elk rijtje cijfers ‘achter de komma’ een uniek getal vastlegt.

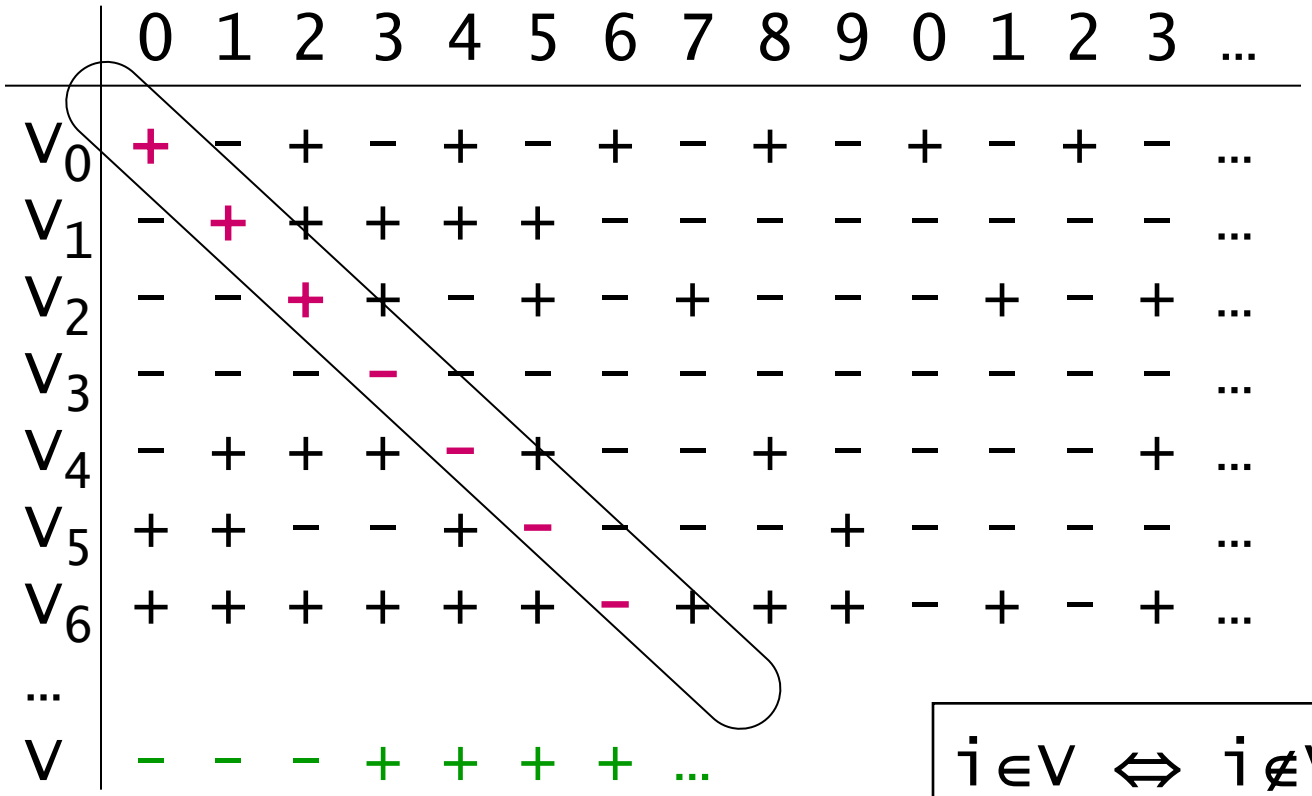
We gaan iets anders doen. We laten zien dat de machtsverzameling van $\mathbb{N}$ niet aftelbaar is. Sterker: geen enkele machtsverzameling is gelijkmachtig met de verzameling zelf!

diagonalisatie

Er bestaat géén bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, \ldots$

Bewijs uit het ongerijmde



$i \in V \Leftrightarrow i \notin V_i$

toelichting

Er bestaat géén bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

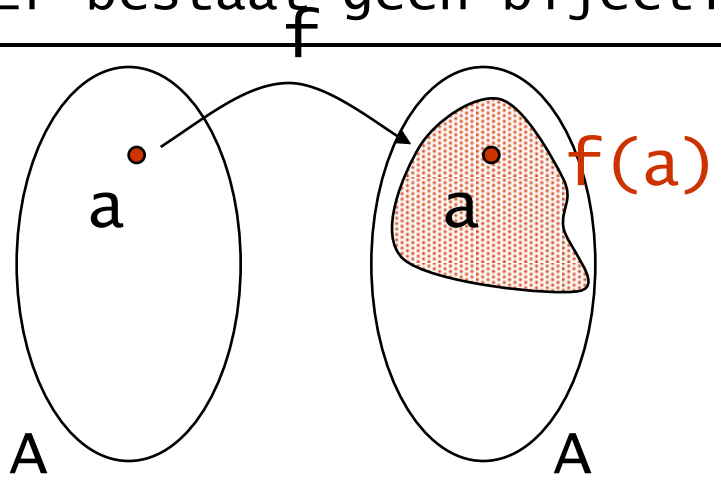
We bewijzen dit uit het ongerijmde.

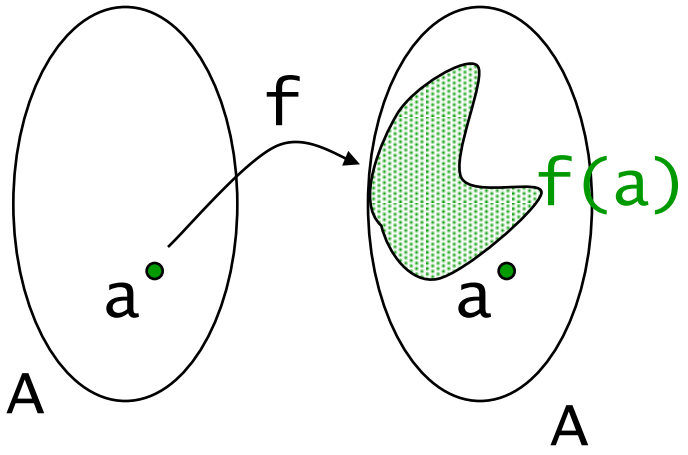
Stel dat er wel een bijectie bestaat; dan kunnen we alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ aftellen: V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, … met $V_i \subseteq \mathbb{N}$.
We kunnen dan een nieuwe verzameling V construeren die niet in de opsomming voorkomt (zie vorige sheet): immers er geldt voor elke i dat $i \in V \Leftrightarrow i \notin V_i$, dus $V \neq V_i$ voor elke i.

Op de volgende sheets een gegeneraliseerde versie: er bestaat geen bijectie tussen A en $\mathcal{P}(A)$, de machtsverzameling van A. Het bewijs gaat analoog, ook weer uit het ongerijmde.

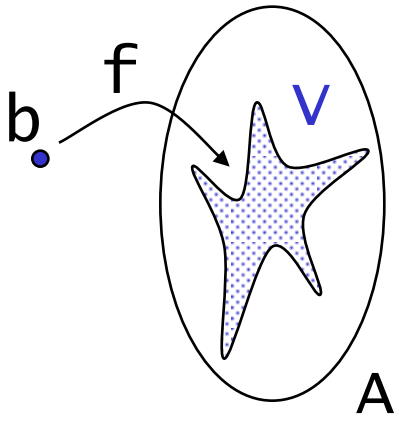
generalisatie: theorem 3.4

Er bestaat géén bijectie tussen A en $\mathcal{P}(A)$



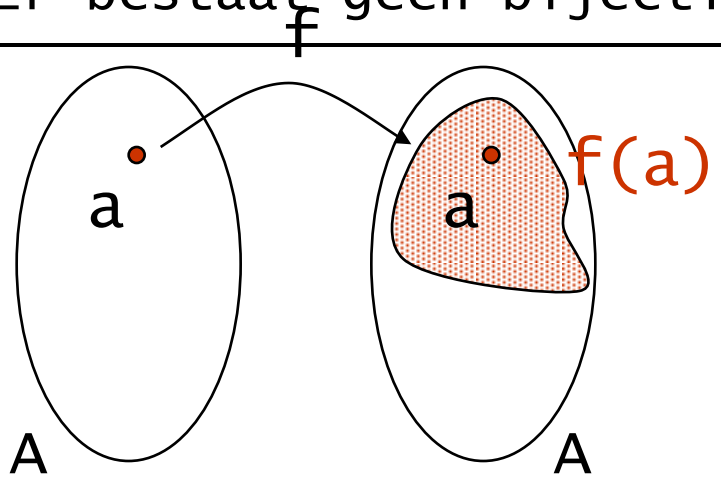


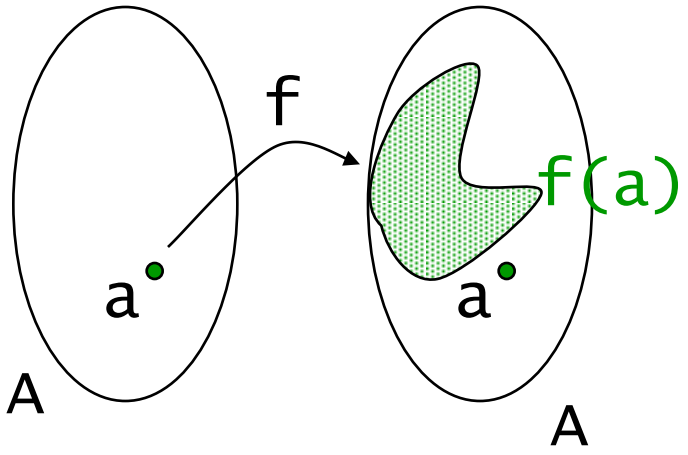
$V = \{ a \in A \mid a \notin f(a) \}$



generalisatie: theorem 3.4

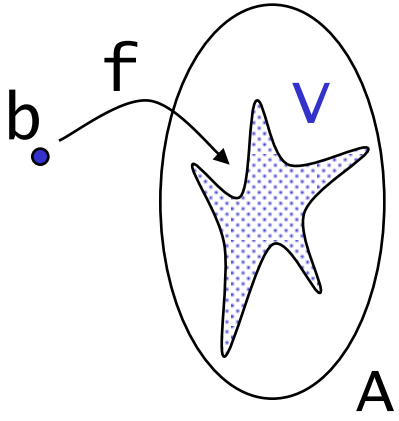
Er bestaat géén bijectie tussen A en $\mathcal{P}(A)$





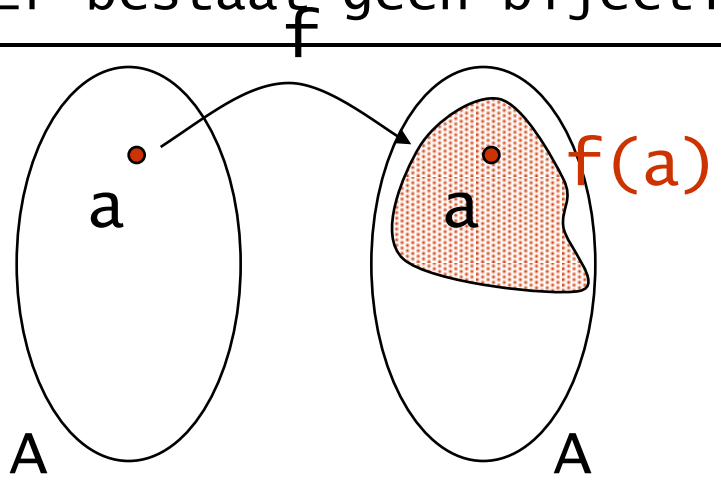
$V = \{ a \in A \mid a \notin f(a) \}$

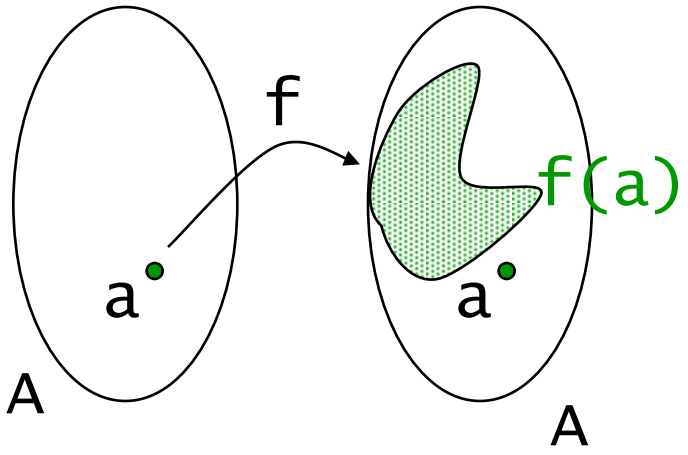
$V \subseteq A$ f surjectief: $V = f(b)$



generalisatie: theorem 3.4

Er bestaat géén bijectie tussen A en $\mathcal{P}(A)$

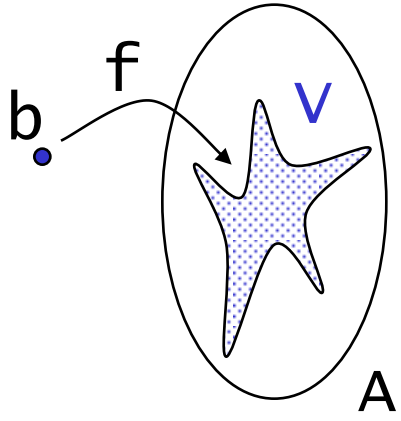




$$V = \{\, a \in A \mid a \notin f(a) \,\}$$

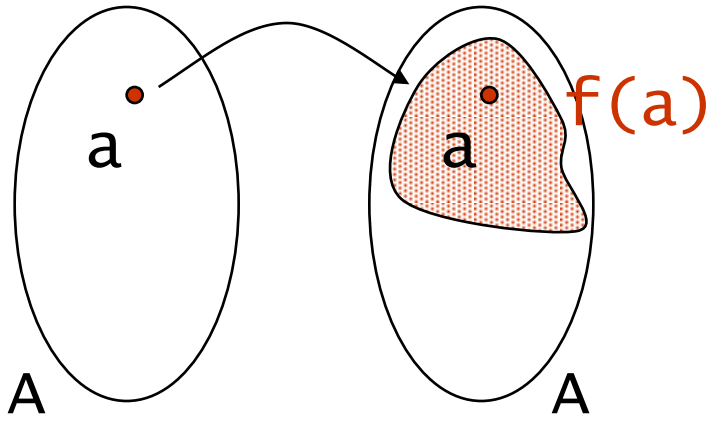
$V \subseteq A$ f surjectief: $V = f(b)$

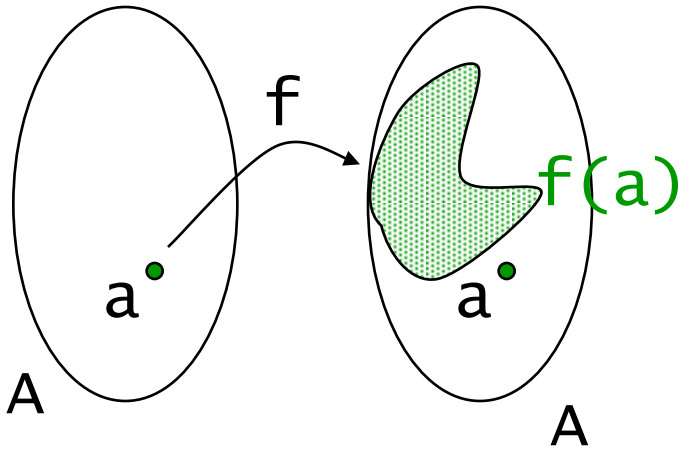
$$b \in V \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} b \notin f(b)$$



generalisatie: theorem 3.4

Er bestaat géén bijectie tussen A en $\mathcal{P}(A)$





$V = \{ a \in A \mid a \notin f(a) \}$

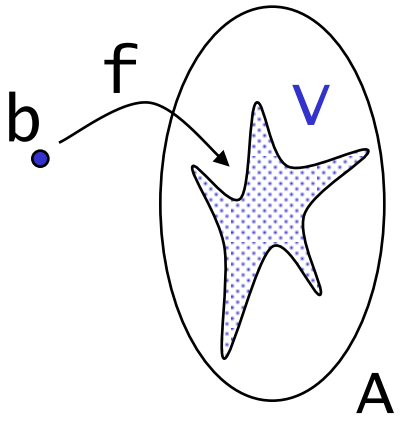
$V \subseteq A$ f surjectief: $V = f(b)$

$b \in V \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} b \notin f(b)$

máár $V = f(b)$!

$b \in f(b) \Leftrightarrow b \notin f(b)$

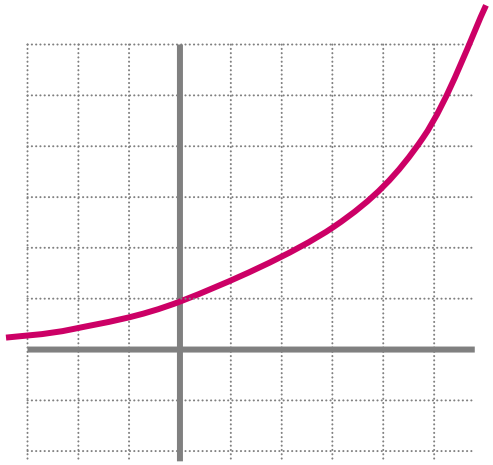
tegenspraak

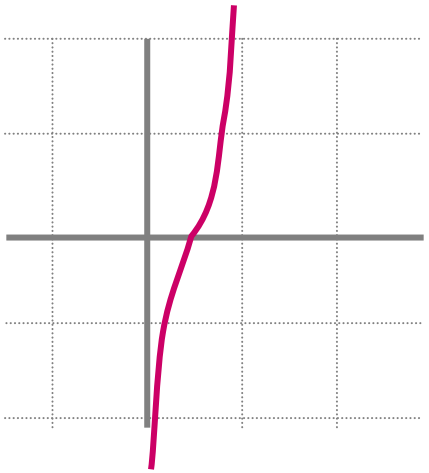


gelijkmachtigheid

Twee verzamelingen A en B heten *gelijkmachtig* als er een bijectie tussen A en B bestaat.

Er bestaat een bijectie tussen $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$
Er bestaat een bijectie tussen $\langle 0,1\rangle$ en $\mathbb{R}$





$\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, en $\langle 0,1\rangle$ en $\mathbb{R}$ zijn gelijkmachtig

A en $\mathcal{P}(A)$ zijn niet gelijkmachtig

eindig

Voor *eindige* verzamelingen A en B geldt: A en B zijn gelijkmachtig desda ze evenveel elementen hebben (|A|=|B|, of n(A)=n(B))

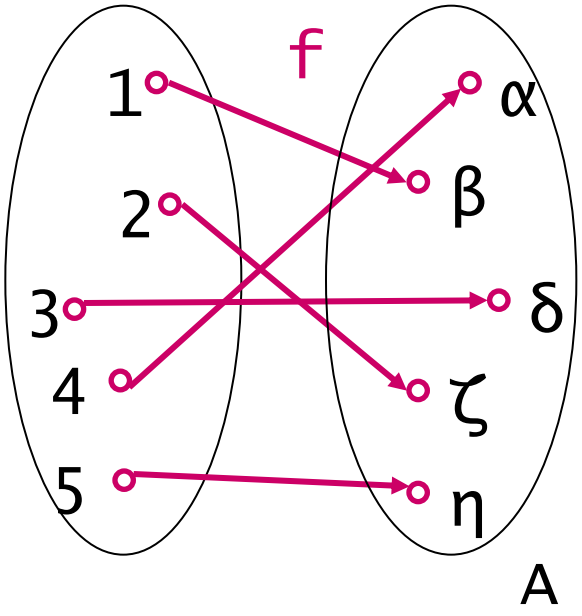
Intuïtief is dit duidelijk, immers een bijectie tussen A en B geeft een 1-1-correspondentie tussen de elementen van A en de elementen van B. Omgekeerd is eenvoudig een bijectie te construeren als het aantal elementen overeenkomt.

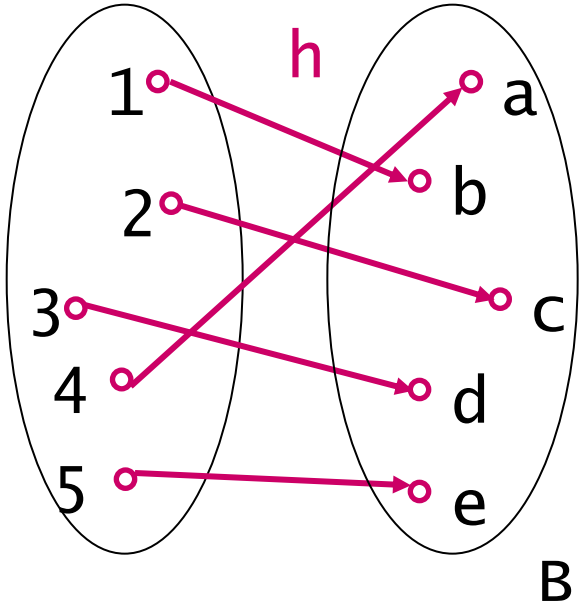
Met de formele definitie voor tellen van de elementen van A (bijectie tussen { 1,2, … , n } en A) moet eigenlijk ook een formeel bewijs worden gegeven. Zie het dictaatje §3.2, Stelling 3.6.

formeel bewijs

Voor *eindige* verzamelingen A en B geldt: A en B zijn gelijkmachtig desda ze evenveel elementen hebben (|A| = |B|)

Als voorbeeld van rechts naar links: stel A en B hebben evenveel elementen: f en h bijecties





$h \circ f^{-1} : A \to B$ bijectie

cardinaliteit

Twee eindige verzamelingen hebben dezelfde cardinaliteit als ze evenveel elementen hebben.

Algemener: twee verzamelingen hebben dezelfde cardinaliteit als er een bijectie tussen bestaat, dus als ze gelijkmachtig zijn.

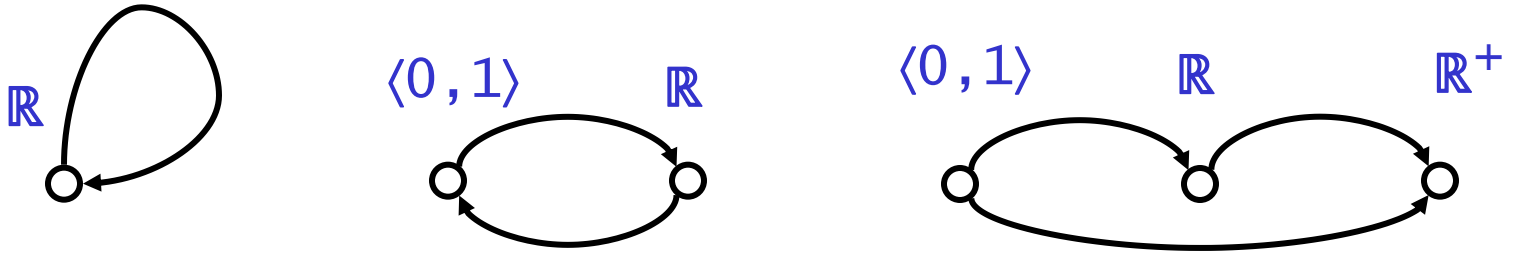
Voor oneindige verzamelingen:

$$|A| = \aleph_0$$

als A gelijkmachtig is met $\mathbb{N}$

gelijkmachtigheid

$\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, en $\langle 0,1\rangle$ en $\mathbb{R}$ zijn gelijkmachtig



- *reflexief*
  $id : A \to A$
- *symmetrisch*
  $f : A \to B$ dan $f^{-1} : B \to A$
- *transitief*
  $f : A \to B$ en $g : B \to C$
  dan $g \circ f : A \to C$

Gelijkmachtigheid is dus een equivalentierelatie

paradox van Russell

Er bestaat geen verzameling van alle verzamelingen!

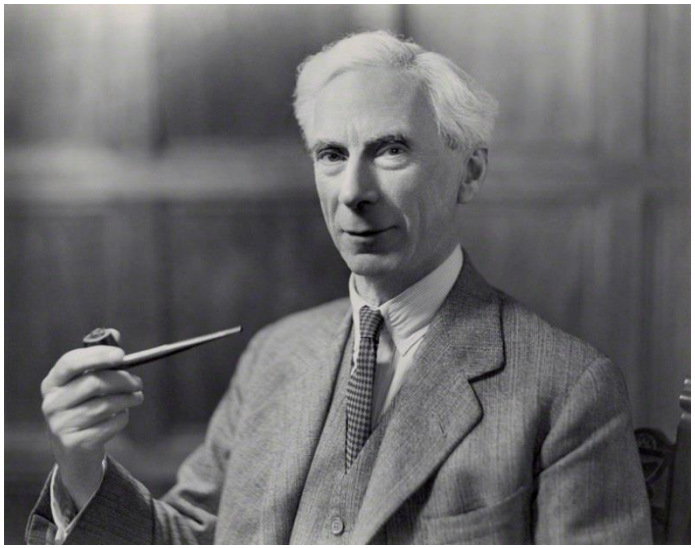
Paradox van Russell.
Laat R de verzameling zijn van alle verzamelingen die zichzelf niet bevatten:

$R = \{x | x\ x \notin x\}$. Dan geldt: $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$

http://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_Russell
Gerelateerd: Barber paradox.
http://en.wikipedia.org/wiki/Barber_paradox

Cantor en Russell

Georg Cantor 1845-1918



Bertrand Russell 1872-1970

11.8 *modulo rekening*

en dictaatje §3.1

ook: §3.4 modular arithmetic

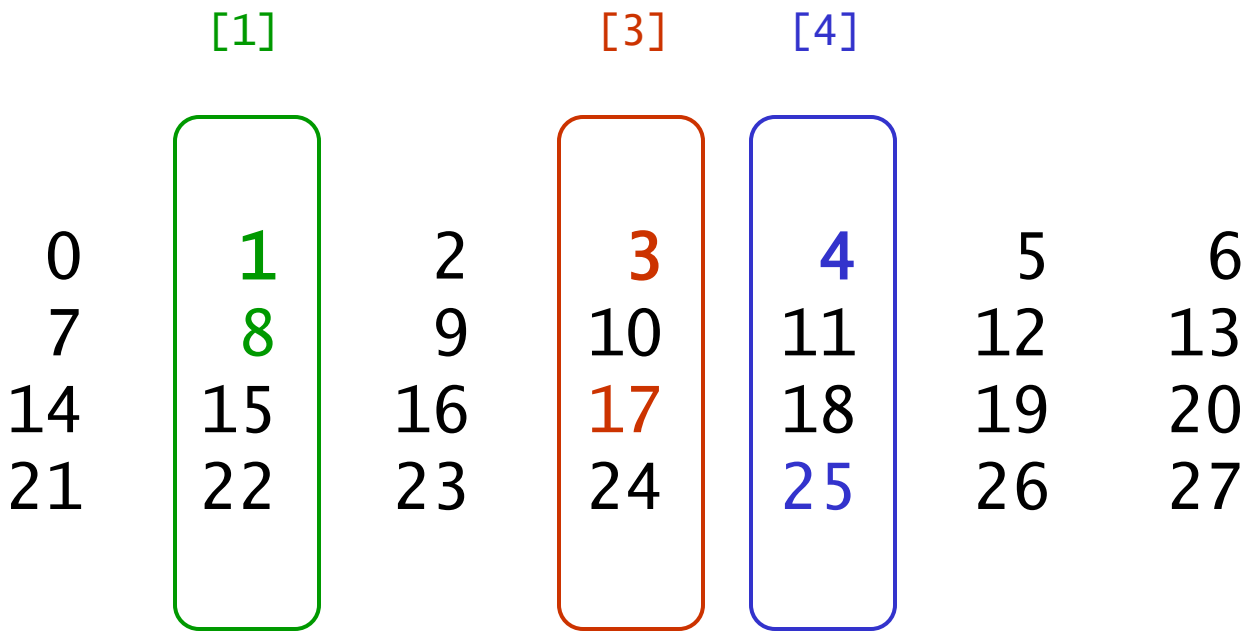
§11.8 klokrekenen

17 u.
8 uur later:
01 u.

17+8 ≡ 1 (24)

rekenen modulo 24

optellen modulo 7



1 + 3 = 4
8 + 17 = 25

modulo rekenen

$n \in \mathbb{N}^+$

a en b heten *congruent modulo* n
als a-b deelbaar is door n

'dezelfde rest'
bij deling door n

$a \equiv b \pmod{n}$

Dit is een equivalentierelatie:

- $a \equiv a$
  a-a = 0
- $a \equiv b$ dan $b \equiv a$
  b-a = -(a-b)
- $a \equiv b$ en $b \equiv c$ dan $a \equiv c$
  a-c = (a-b)+(b-c)

R equivalentierelatie,
dan *equivalentieklasse*
van x: $[x]_R = \{ y \in V \mid xRy \}$

restklassen

$n \in \mathbb{N}^+$; a en b heten *congruent modulo* n
als a-b deelbaar is door n $a \equiv b \pmod{n}$
De *equivalentieklasse* van x is $[x]_R = \{ y \in V \mid xRy \}$

In dit geval: $[x] = \{ y \in \mathbb{Z} \mid x \equiv y \pmod 7 \}$

restklassen modulo 7

$\overline{0}$ $[0] = \{ \ldots -14\ -7\ 0\ 7\ 14 \ldots \}$
$\overline{1}$ $[1] = \{ \ldots -13\ -6\ 1\ 8\ 15 \ldots \}$
$\overline{2}$ $[2] = \{ \ldots -12\ -5\ 2\ 9\ 16 \ldots \}$
$\overline{3}$ $[3] = \{ \ldots -11\ -4\ 3\ 10\ 17 \ldots \}$

$\overline{6}$ $[6] = \{ \ldots -8\ -1\ 6\ 13\ 20 \ldots \} = [-8]$ etc.

notatie

$-8 \equiv 13 \pmod 7$ of $\overline{-8} = \overline{13}$
getallen klassen

equivalentieklassen

Algemeen:

Als R een equivalentierelatie is in een verzameling V, dan is $[x]_R$ gedefinieerd als de verzameling van alle elementen uit V die aan x “gerelateerd” zijn via R. Dit noemen we de equivalentieklasse van x.

Preciezer:
De *equivalentieklasse* van x is $[x]_R = \{ y \in V \mid xRy \}$

De collectie van alle equivalentieklassen $[x]_R$ (genoteerd als V/R) is een partitie van V.

In ons voorbeeld: de restklassen modulo 7 vormen een disjuncte opspanning (partitie) van $\mathbb{Z}$. Zie ook verderop en Schaum pagina 32.

‘congruentie’

als $a \equiv a'$ en $b \equiv b'$ (modulo n)
dan $a+b \equiv a'+b'$ en $a-b \equiv a'-b'$ en $a \cdot b \equiv a' \cdot b'$ (modulo n)
en $a^k \equiv (a')^k$ (modulo n) (volgt uit $a \cdot b \equiv a' \cdot b'$, bv met inductie naar k)

dus: het maakt niet uit, welk element uit de restklasse gekozen wordt

voorbeeld: modulo 7 $72 \equiv 2$ & $143 \equiv 3$

$72+143 = 215$	$2+3=5$	maar	$215 \equiv 5$
$72-143 = -71$	$2-3=-1$	maar	$-71 \equiv -1$
$72 \cdot 143 = 10296$	$2 \cdot 3=6$	maar	$10296 \equiv 6$

bewijs: want deelbaar door n …

$$(a+b)-(a'+b') = (a-a')+(b-b') \equiv 0 \pmod{n}$$
$$(a-b)-(a'-b') = (a-a')-(b-b') \equiv 0 \pmod{n}$$
$$a \cdot b - a' \cdot b' = a(b-b')+b'(a-a') \equiv 0 \pmod{n}$$

laatste cijfer

Wat is het laatste cijfer van 3^{234} ?

modulo 10 rekenen

machten van 3

1 3 9 $3^3=27$ $3^4=27\cdot3\equiv7\cdot3\equiv1 \pmod{10}$

$3^{234} = 3^{4\cdot58+2} = (3^4)^{58} \cdot 3^2 \equiv 1^{58} \cdot 9 \equiv 9$

weekdagen

```
  1  1 jan 00 za [1]
  2  2 jan 00 zo [2]
    …
 31 31 jan 00
 32  1 feb 00 di [4]
    …
366 31 dec 00 zo [2]
    …
xxx 13 mei 23 ?? [?]
```

dagnummers

```
1 za
2 zo
3 ma
4 di
5 wo
6 do
7 vr
```

23 jaar · 365 dagen/jaar
+ 6 schrikkeldagen
+ 31+28+31+30+13 dagen in 2023

modulo 7

23·365 + 6 + 31+28+31+30+13
≡ 2·1 + 6 + 3+0+3+2+6 ≡ 22 ≡ 1
zaterdag

deelbaarheid

voor oneven x:
x^2-1 deelbaar door 8

Bewijs?

basis

$8|1^2-1=0$

inductiestap

$(x+2)^2-1 =$
$x^2+4x+3 =$
$x^2-1 + 4(x+1)$

$8|x^2-1$ aanname
$2|x+1$ (even!)
$8|4(x+1)$

modulo 8 oneven x

$x^2-1\equiv 0$ dwz $x^2\equiv 1$

klassen 1 3 5 7 :

$1^2= 1\equiv 1$
$3^2= 9\equiv 1$
$5^2=25\equiv 1$
$7^2=49\equiv 1$

als $x\equiv y$
dan $x^2\equiv y^2$

zonder modulo-rekenen:
$(8k+5)^2=64k^2+80k+24+1$ is 8-voud + 1

deelbaarheid

voor oneven x:
x^2-1 deelbaar door 8

Kunnen we bewijzen met volledige inductie, modulo rekenen, …, hier nog een manier

$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

Product van twee opvolgende even getallen; dan moet de één deelbaar zijn door 4 en de andere door 2.

negenproef

m is deelbaar door 9
als de som van de cijfers van m deelbaar is door 9

232029 = 25781·9
2+3+2+0+2+9 = 18

modulo 9
$10 \equiv 1$
$10^n \equiv 1^n \equiv 1$

$c_k \ldots c_2 c_1 c_0 =$
$c_k 10^k + \ldots + c_1 10^1 + c_0 10^0 \equiv$
$c_k + \ldots + c_1 + c_0$

$$\Sigma_{n=0}^{k} c_n 10^n \equiv \Sigma_{n=0}^{k} c_n$$

getal ≡ som cijfers

rekenen met restklassen

modulo 6

[1] $\overline{1}$

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_6$

‘gewone’ rekenregels:
commutatief, associatief,
distributief, een, nul
maar *niet* $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$ ‘nuldelers’
$\mathbb{Z}_6$ heeft drie nuldelers: 2,3 en 4 (eigenlijk $\overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$)

rekenen met restklassen

modulo 7

[1] $\overline{1}$

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

·	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_7$

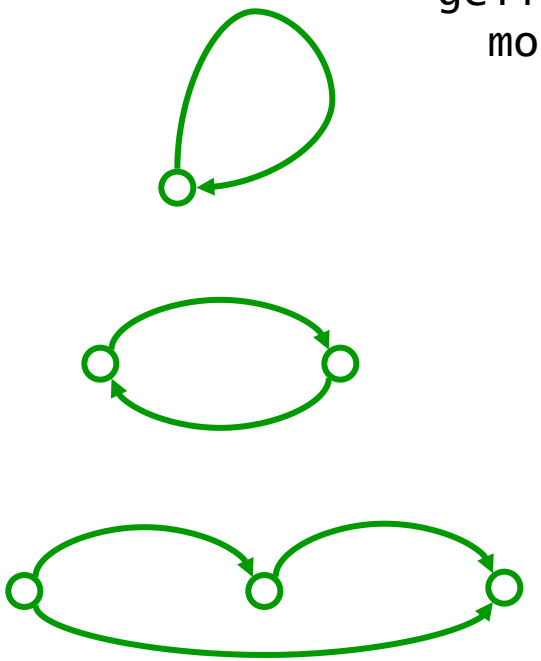
‘gewone’ rekenregels:
commutatief, associatief,
distributief, een, nul

en *wel* $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$ ‘nuldelers’

$\mathbb{Z}_7$ heeft geen nuldelers

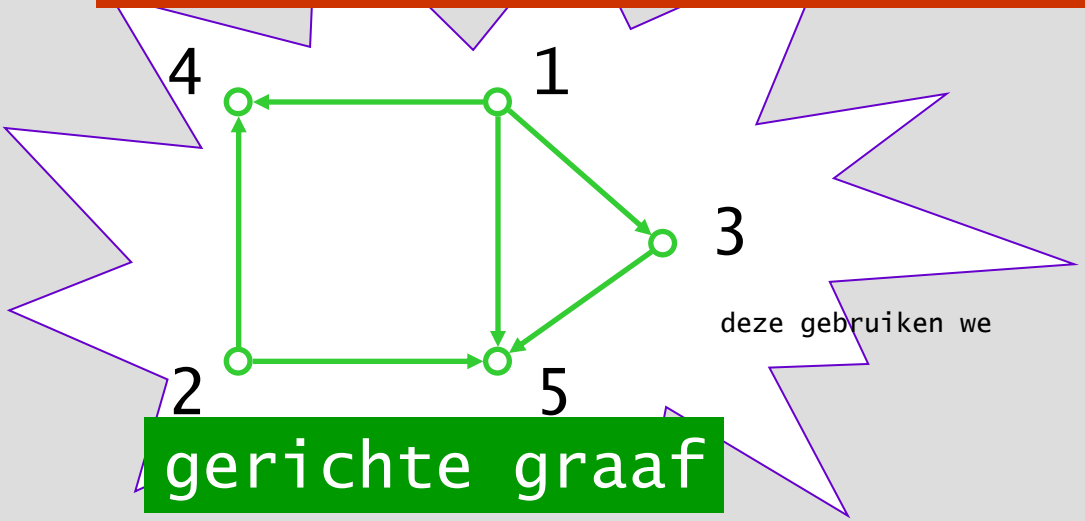
2.8 *Equivalentie-relaties*

algemeen
gelijkmachtigheid
modulo rekening



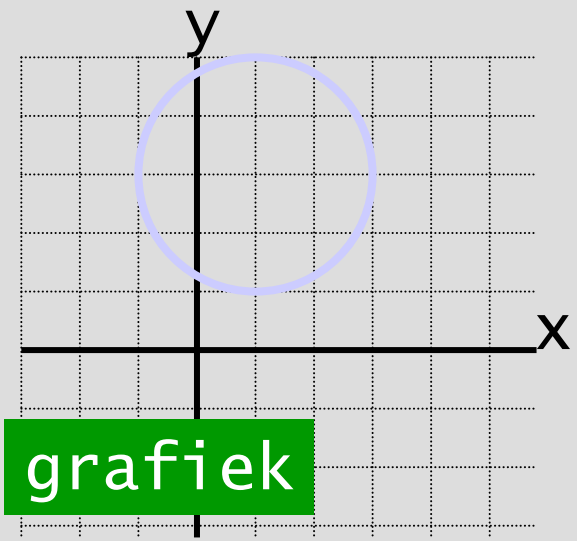
representaties

van binaire relaties

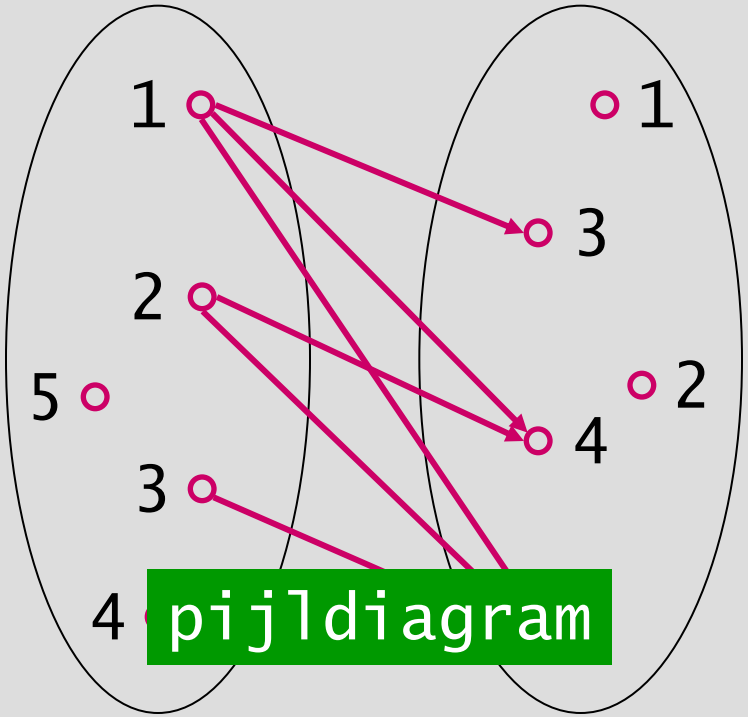


deze gebruiken we

gerichte graaf



grafiek



pijldiagram

	j				
	1	2	3	4	5
i 1	0	0	1	1	1
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

matrix

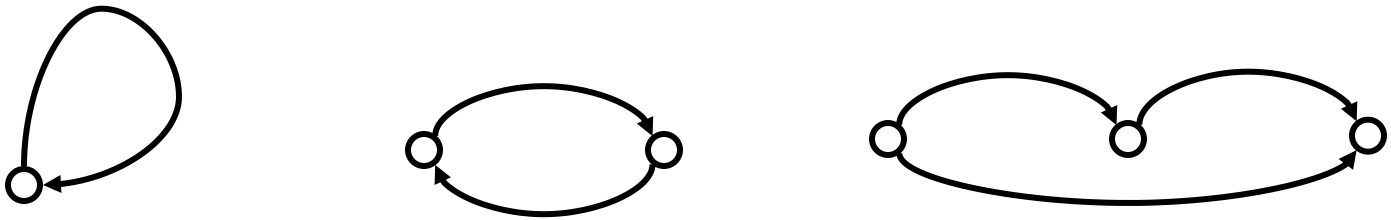
eigenschappen

Een relatie $R \subseteq V \times V$ heet

- *reflexief* als xRx voor alle $x \in V$
- *irreflexief* als xRx voor geen $x \in V$

- *symmetrisch* als xRy impliceert dat yRx
  (voor alle $x,y \in V$)
- *anti-symmetrisch* als xRy en yRx impliceren dat $x=y$
  (voor alle $x,y \in V$)

- *transitief* als xRy en yRz impliceren dat xRz
  (voor alle $x,y,z \in V$)



voorbeelden

paden in grafen

*ongericht!

$p \to q \;\; q \to r \Rightarrow p \to r$

$p \to p$

$p \to q \Rightarrow q \to p \quad (*)$

samenhangscomponent

breuken

$1/2 = 2/4 = 3/6 = \ldots$

$(1,2) \sim (2,4) \sim (3,6)$

gelijkmachtigheid

$f: A \to B \;\; g: B \to C \Rightarrow g \circ f: A \to C$

$f: A \to B \Rightarrow f^{-1}: B \to A$

$id: A \to A$

modulo n

$x \equiv x \bmod n$

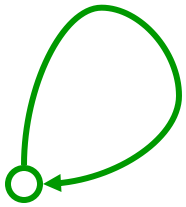
$x \equiv y \bmod n \Rightarrow y \equiv x \bmod n$

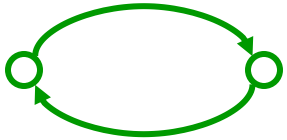
$x \equiv y \bmod n,\ y \equiv z \bmod n \Rightarrow x \equiv z \bmod n$

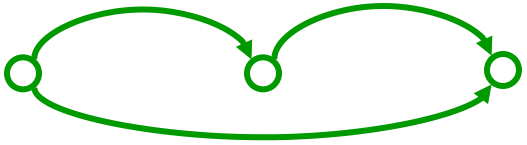
§2.8 equivalentie

Een relatie $R \subseteq V \times V$ heet *equivalentierelatie* als R
- reflexief
- symmetrisch, en
- transitief is

voorbeelden



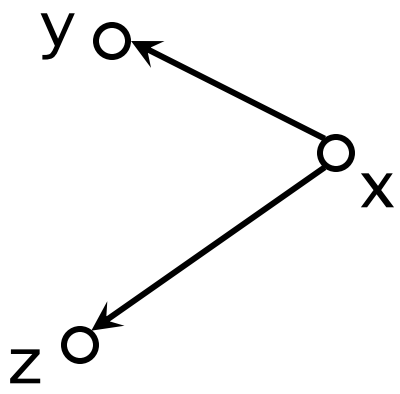




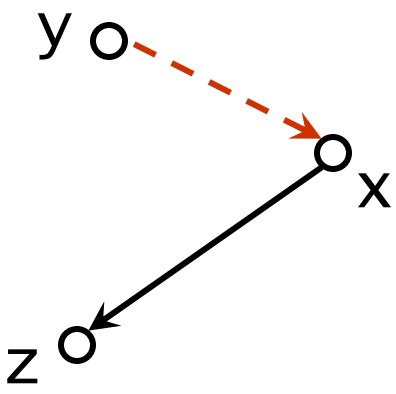
gelijkheid
gelijkmachtig (verzamelingen)
breuken (paren gehelen)
zelfde letters (strings)
congruentie (figuren)
evenwijdig (lijnen)
gelijke kleur
rest modulo n (gehele getallen)
$f: V \to P$ $f(x)=f(y)$
pad (knopen ongerichte graaf)

equivalentieklassen

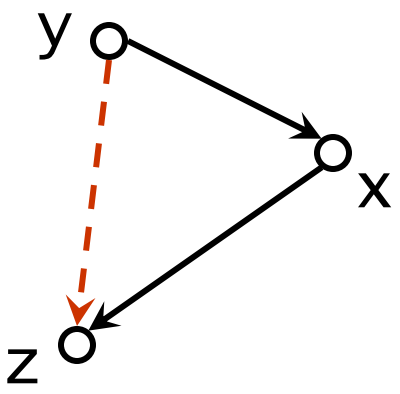
Een relatie R⊆V×V heet *equivalentierelatie* als R reflexief, symmetrisch, en transitief is



als xRy & xRz



dan yRx



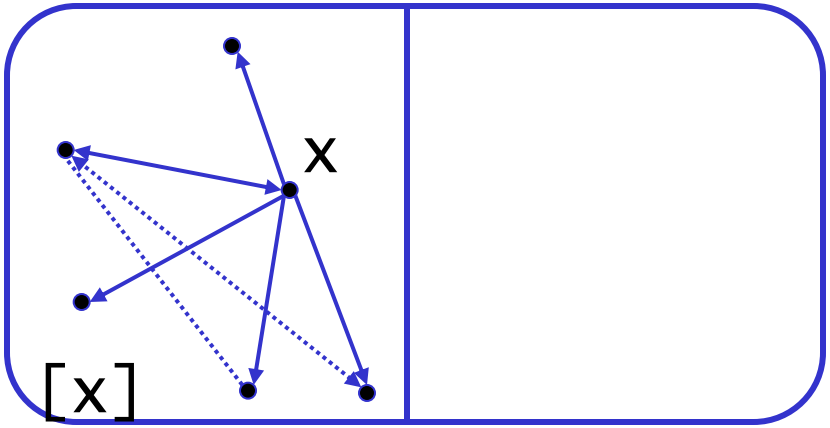
en dus yRz

Theorem 2.6

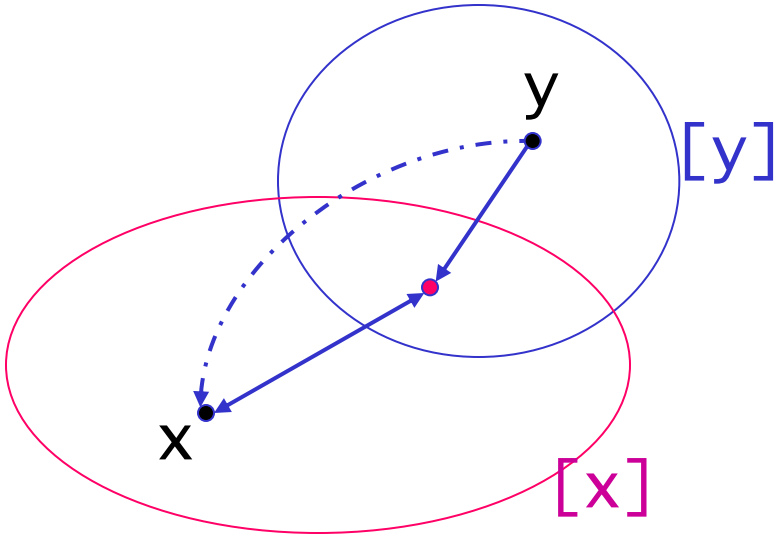
equivalentierelatie:reflexief,symmetrisch,transitief

De *equivalentieklasse* van x is $[x]_R = \{ y \in V \mid xRy \}$

partitie!



- $x \in [x]$
- equivalent:
  1. xRy
  2. $y \in [x]$
  3. $[x]=[y]$
  4. $[x] \cap [y] \neq \emptyset$



partitie

$\mathbb{Z}$ is gelijk aan de disjuncte vereniging van de zeven restklassen modulo 7. De restklassen modulo 7 vormen dus een partitie van $\mathbb{Z}$

restklassen modulo 7

[0] = { … -14 -7 0 7 14 … }	7k
[1] = { … -13 -6 1 8 15 … }	7k+1
[2] = { … -12 -5 2 9 16 … }	7k+2
[3] = { … -11 -4 3 10 17 … }	7k+3
[4] = { … -10 -3 4 11 18 … }	7k+4
[5] = { … -9 -2 5 12 19 … }	7k+5
[6] = { … -8 -1 6 13 20 … }	7k+6

equivalentieklassen

De *equivalentieklasse* van x is $[x]_R = \{ y \in V \mid xRy \}$

- **kleur**

[b] blokken met gelijke kleur als b
wordt bepaald door ***kleur***

- **gelijke rest na deling door 7**

[3] = { … , -11, -4, 3, 10, 17, … }
bepaald door **rest** : 7 klassen
[0] = { … , -14, -7, 0, 7, 14, … }
zeven-vouden

- **afstand tot oorsprong $\mathbb{R}^2$**

(x_1,y_1) R (x_2,y_2) als $x_1^2+y_1^2 = x_2^2+y_2^2$
[(2,1)] alle punten op **afstand** $\sqrt{5}$
cirkels !

nog meer voorbeelden

De *equivalentieklasse* van x is $[x]_R = \{ y \in V \mid xRy \}$

- **gelijkmachtigheid**

$[\mathbb{N}]$ verzamelingen gelijkmachtig met $\mathbb{N}$
… ***aftelbaar***

$[\mathbb{N}] = [\mathbb{Q}]$ maar $[\mathbb{R}] \neq [\mathbb{Q}]$

$[\emptyset] = \{ \emptyset \}$

$[\{1,2,3,4,5\}]$ verz^n met 5 elementen
cardinaalgetallen

- **evenwijdigheid**

$[\ell]$ lijnen evenwijdig met ℓ
bepaald door ***richting***s-coëfficiënt

- **verbonden door wandeling/pad** (ongericht)

[p] punten verbonden met p: ***component*** van p

(werk)college

College volgende week:
dinsdag 4 december,
13.30 – 15.15 in zaal DS (Huygens)

Werkcollege deze week
vrijdag 30 november,
9.00 – 10.45 in Snelliuszalen 402, 405