Combinatoriek

5

Achtste college

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

geordende rijtje

Hoeveel verschillende rijtjes van lengte n, bestaande uit de getallen 1 t/m 5 kun je maken?

- volgorde van belang
- niet noodzakelijk verschillend
  (= trekken met teruglegging)

Antwoord: 5^n

deelverzamelingen

We zagen al eerder:
er zijn 2^n verschillende rijtjes bestaande uit n nullen en enen

Dit is precies het aantal deelverzamelingen van een verzameling $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ met n elementen.
Immers, elke deelverzameling correspondeert een-eenduidig met een rijtje nullen en enen.
Een 0 op plek i betekent dat het i-de element v_i niet in de deelverzameling zit; een 1 betekent dat v_i er wel in zit.

$V = \{ 1,2,3,4 \}$, dan $\{ 2,3 \} \leftrightarrow 0110$

Hoeveel verschillende rijtjes ter lengte 5 kun je maken met de getallen 1 t/m 5 als elk getal maar 1 keer mag voorkomen?

Ofwel: hoeveel permutaties (volgordes) van de waardes 1 t/m 5 zijn er?

- volgorde van belang
- wel verschillend
  (= trekken zonder teruglegging)

Antwoord: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

variant

Hoeveel verschillende rijtjes van lengte 3 kun je maken met de getallen 1 t/m 5 als elk getal maar 1 keer mag voorkomen?

- volgorde van belang
- wel verschillend
  (= trekken zonder teruglegging)

Antwoord: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Hoeveel verschillende drietallen kun je kiezen uit de getallen 1 t/m 5, waarbij elk getal maar 1 keer mag voorkomen?

- volgorde niet van belang
- wel verschillend
  (= trekken zonder teruglegging)

Antwoord: $(5 \cdot 4 \cdot 3)/(3 \cdot 2 \cdot 1) = 10$

Aantal rijtjes ter lengte k, te maken met de getallen 1 t/m n n^k

(volgorde van belang, niet verschillend)

Aantal permutaties van 1 t/m n $n!$

(volgorde van belang, wel verschillend)

Aantal manieren om k getallen uit n te kiezen $\binom{n}{k}$

(volgorde niet van belang, wel verschillend)

In plaats van getallen: objecten

tellen in eindige verzamelingen

binomiaalcoëfficienten (§5.3, 5.5)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

"n boven k"
"n choose k"

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

"n faculteit"
"n factorial"

Op hoeveel manieren kan ik k objecten uit n objecten kiezen?

Voorbeeldje:
$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

driehoek van Pascal

binomiaalcoëfficienten

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

driehoek van Pascal

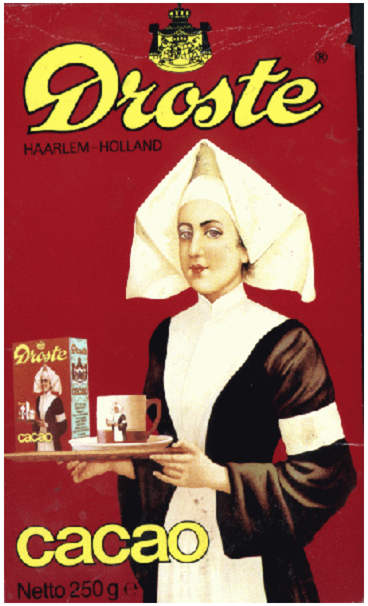
$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

.... in termen van jezelf

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

recursie



sommetje

De Leidsche Flesch heeft een nieuw bestuur nodig, bestaande uit 5 personen.
Er zijn 8 kandidaten: 4 vrouwen en 4 mannen.

1. Op hoeveel manieren kan men hieruit 5 studenten voor het bestuur kiezen?
2. Dezelfde vraag als 1., maar nu onder de restrictie dat het bestuur moet bestaan uit 2 mannen en 3 vrouwen
3. Dezelfde vraag als 1., maar nu moet ook bepaald worden wie welke functie krijgt (praeses, ab-actis, quaestor, assessor onderwijs, assessor extern).
4. Dezelfde vraag als 2., maar nu moet ook bepaald worden wie welke functie krijgt