1) Gebruik een Venn diagram om de uitdrukking $A - (A - B)$ te vereenvoudigen.

2) Redeneren met Venn diagrammen

a. Prove the following identity: $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$.

b. Prove $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

3) Prove Theorem 1.4: The following are equivalent: $A \subseteq B$, $A \cap B = A$, and $A \cup B = B$.
Sch:1.8

4) Gegeven zijn de volgende talen over $B = \{ 0, 1 \}$:
$K = \{ x \mid \text{het binaire getal } x \text{ is een drievoud} \}$
$L = \{ x \mid x \text{ bevat geen twee opeenvolgende 0-en} \}$

a. Bepaal van elke taal de eerste vijf elementen, uitgaande van een ordening eerst op lengte en bij gelijke lengte alfabetisch.

b. Teken een Venn diagram voor deze talen, met in elk gebied
(i) een string van minimale lengte
(ii) een string van lengte vijf.

5) Met $\mathcal{P}(V)$ geven we de machtsverzameling van de verzameling V aan.

Laat nu $V = \{ \{\varnothing\}, u, v \}$.
Geldt $\varnothing \in \mathcal{P}(V)$? Geldt $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(V)$? Geldt $\{\{\varnothing\}\} \in \mathcal{P}(V)$?
Geldt $\varnothing \subseteq \mathcal{P}(V)$? Geldt $\{\varnothing\} \subseteq \mathcal{P}(V)$? Geldt $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \mathcal{P}(V)$?
Vergeet de uitleg niet.

6) Gegeven is dat @ een associatieve operatie is.
Laat zien dat dan $(1@((2@3)@4))@(5@6) = 1@(2@(3@(4@(5@6))))$.

7) Bewijs de volgende eigenschappen van symmetrisch verschil. **Sch:1.59**

a. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ *associative*

b. $A \oplus B = B \oplus A$ *commutative*

c. als $A \oplus B = A \oplus C$ dan $B = C$ *cancellation*

d. $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$ *distributive*

Een aantal opgaven is overgenomen uit (de vorige editie van) Schaum. We hebben ze niet allemaal meer in de huidige editie kunnen terugvinden.

8) **a.** Gebruik de regels van de verzamelingenalgebra om te laten zien dat in het algemeen $(V \cap W) \cap (V \cup W) = V \cap W$. Benoem de gebruikte regels. *30 juli 2004*

b. Vereenvoudig $[\,(A \cup B^c) \cap C\,] \cup [\,(B - A) \cap C\,]$ zo ver mogelijk, gebruikmakend van rekenregels uit de verzamelingenalgebra. Benoem de gebruikte regels.

Aanwijzing: wat is $(A \cup B^c) \cup (B - A)$? *17 december 2002*

9) In opgave 7 zagen we een aantal eigenschappen van de operatie $\oplus$. We kijken nu naar vergelijkbare regels.

a. Geldt *cancellation* voor vereniging: als $A \cup B = A \cup C$ dan $B = C$?
Voor doorsnede?

b. Distribueert $\cup$ over $\oplus$:
$A \cup (B \oplus C) = (A \cup B) \oplus (A \cup C)$?

c. Distribueert $\oplus$ over $\cap$:
$A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$?

10) A survey on a sample of 25 new cars being sold at a local auto dealer was conducted to see which of three popular options, air conditioning (A), radio (R), and power windows (W), were already installed. The survey found: 15 had air-conditioning, 12 had radio, 11 had power windows, 5 had air-conditioning and power windows, 9 had air-conditioning and radio, 4 had radio and power windows, 3 had all three options.

Find the number of cars that had (a) only W; (b) only A; (c) only R; (d) R and W, but not A; (e) A and R, but not W; (f) only one of the options; (g) at least one option; (h) none of the options. **Sch:1.41**

11) Use Theorem 1.9 ($n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$) to prove Corollary 1.10:
If A, B, and C are finite sets, then so is $A \cup B \cup C$ and **Sch:1.40**
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

12) Het begrip geordend paar kan worden gedefinieerd met behulp van verzamelingen. Vat daartoe het paar (a, b) op als afkorting voor de verzameling $\{\ \{a\}, \{a, b\}\ \}$. Laat zien dat hiermee $(a, b) = (c, d)$ precies dan als $a = c$ en $b = d$.

13) **a.** Geef de elementen van $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0, 1\}))$.

b. Bepaal $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))))$.

14) We werken binnen een universum U. Bij een verzameling $A \subseteq U$ definieert men wel de *karakteristieke functie* $\kappa_A : U \to \{0, 1\}$ als $\kappa_A(x) = 1$ als $x \in A$ en anders $\kappa_A(x) = 0$.

a. Druk de karakeristieke functie κ_{A^c} uit in κ_A.

b. Idem voor de karakeristieke functies $\kappa_{A \cup B}$ en $\kappa_{A \cap B}$, uitgedrukt in κ_A en κ_B.

15) Given $A = \{1, 2, 3, 4\}$ and $B = \{x, y, z\}$. Let R be the following relation from A to B:

$$R = \{\ (1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)\ \}$$

a. Determine the matrix of the relation.

b. Draw the arrow diagram of R.

c. Find the inverse relation R^{-1} of R.

d. Determine the domain and range [bereik] of R. **Sch:2.4**

e. Is R injectief, surjectief, totaal, functioneel?

16) Let $R = \{\ (1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\ \}$ be a relation on $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a. Find the matrix M_R of R.

b. Find the domain and range of R.

c. Find R^{-1}.

d. Draw the directed graph of R.

e. Find the composition relation $R \circ R$.

f. Bepaal $R^{-1} \circ R$, en $(R \circ R)^{-1}$.

17) Each of the following defines a relation R on the positive integers $\mathbb{N}^+$:

a. "x is greater than y"

b. "xy is the square of an integer" (gebruik: als x^2 geheel is dan is ook x dat)

c. "$x + y = 10$"

d. "$x + 4y = 10$"

Which relations are (i) reflexive; (ii) symmetric; (iii) antisymmetric; (iv) transitive.

e. Is de relatie R^2 voor bovenstaande R eenvoudig te beschrijven?

18) Let R and S be relations on a set A. Assuming A has at least three elements, state whether each of the following statements is true or false. If it is false, give a counterexample on the set $A = \{1, 2, 3\}$:

i If R and S have property P then so has $R \cap S$.

ii If R and S have property P then so has $R \cup S$.

P is daarbij achtereenvolgens 'symmetric', 'reflexive', 'transitive' en 'antisymmetric'.

19) $R \subseteq A \times B$ is een relatie.

a. Bewijs: R is functioneel precies als $R^{-1} \circ R \subseteq 1_B$.

b. Bewijs: R is surjectief precies als $R^{-1} \circ R \supseteq 1_B$.

20) Determine if each function is one-to-one [1-1, injectief].

a. To each person on the earth assign the number which corresponds to its age.

b. To each country in the world assign the latitude and longitude of its capital.

c. To each book written by only one author assign the author.

d. To each country which has a prime minister assign its prime minister.

21) Consider functions $f : A \to B$ and $g : B \to C$. Prove the following:

a. If f and g are one-to-one, then the composition function $g \circ f$ is one-to-one [1-1, injectief]

b. If f and g are onto functions, then $g \circ f$ is an onto function [op, surjectief].

22) a. De functie tail geeft voor een getal $n \in \mathbb{N}$ de lengte van de reeks 1-en waarmee de binaire schrijfwijze van n eindigt. (een hele mond vol, zie transparanten)

Bepaal $\text{tail}^{-1}(2)$.

b. Voor een eindige verzameling Σ (een 'alfabet') is Σ^* de verzameling van alle strings over Σ, ofwel alle eindige rijtjes elementen uit Σ.

De afbeelding h gaat van $\{a, b, c\}^*$ naar $\{0, 1\}^*$ en varandert de letters a, b, c respectievelijk in 10, 100, 010. Dus bijvoorbeeld $h(bbacaa) = 100 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 010 \cdot 10 \cdot 10 = (100)^3(10)^3$.

Bepaal $h^{-1}(\ (100)^3(10)^3\ )$. Ook voorbeeld in dictaat.

23) $f : A \to B$ is een functie.

a. Voor $V \subseteq A$ geldt $V \subseteq f^{-1}(f(V))$. Laat dit zien.

b. Voor $W \subseteq B$ geldt $W \supseteq f(f^{-1}(W))$. Laat dit zien.

c. Wat verandert er in bovenstaande inclusies bij injectieve en surjectieve functies? En bij bijecties?

24) a. De rij van Fibonacci wordt gegeven door $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ $(n \geq 1)$ met beginwaarden $F_0 = 0$ en $F_1 = 1$. Bereken $\sum_{k=1}^{4} F_{2k}$.

b. Bepaal formules (uitgedrukt in n) voor achtereenvolgens $\sum_{k=0}^{n}(-2)^k$, $\sum_{k=0}^{n} 1$ en $\sum_{k=0}^{n}(3^k + (-2)^k + 1)$.

c. In het universum $\mathbb{P} = \mathbb{N}^+$ is V_n de verzameling veelvouden van n. Geef een uitdrukking (mbv. de V_n) van de verzameling priemgetallen.

d. Gegeven is een $n \times n$ matrix $A = (a_{ij})$. Geef een formule voor het optellen van de elementen rechtsboven de diagonaal.

25) Vind een algemene formule (bewijs is hier niet nodig).

a. $1 = 1$, $1 - 4 = -(1 + 2)$, $1 - 4 + 9 = 1 + 2 + 3$, $1 - 4 + 9 - 16 = -(1 + 2 + 3 + 4)$, $\ldots$.

b. $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$, $\ldots$.

26) Beschrijf een bijectieve functie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$.

Dit is een oplossing voor **Sch:3.11**: Show that the set $\mathbb{Z}$ of integers has cardinality $\aleph_0$.

27) (*30 juli 2004*) Gegeven is de matrix

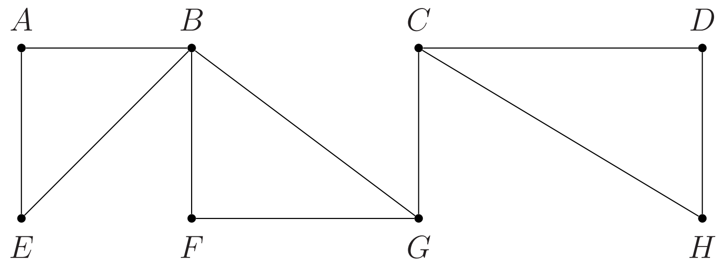
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teken M als gerichte graaf, met genummerde knopen 1,2,3,4.

a. Geef de matrix behorend bij de relatie $M \circ M$, en bij de relatie $M^{-1} \circ M$.
Hierbij zijn $^{-1}$ en $\circ$ natuurlijk de operaties *op relaties*, niet te verwarren met matrix-operaties die u misschien elders heeft geleerd.

b. Hoe zien we aan een willekeurige matrix dat de bijbehorende graaf ongericht is?
Dat de bijbehorende (multi-)graaf geen lussen heeft?
Dat de bijbehorende relatie functioneel is?

28) Consider the graph $\mathcal{G}$ [hieronder]. Find: (a) the degree of each vertex (and verify Theorem 8.1); (b) all simple paths from A to G; (c) all trails (distinct edges) from B to C; (d) $d(A,C)$, the distance from A to C; (e) $\operatorname{diam}(\mathcal{G})$, the diameter of $\mathcal{G}$.



29) Consider the graph $\mathcal{G}$ [hierboven]. Find: (a) all cycles, if any; (b) all cut points, if any; (c) all bridges, if any.

30) Consider the graph $\mathcal{G}$ [hierboven]. Find the subgraph $\mathcal{G}(V', E')$ induced by: (a) $V' = \{\ B, C, D, E, F\ \}$; (b) $V' = \{\ A, C, E, G, H\ \}$; (c) $V' = \{\ B, D, E, H\ \}$; (d) $V' = \{\ C, F, G, H\ \}$; Which of them are isomorphic?

31) Hoeveel niet-isomorfe samenhangende grafen zijn er met vier knopen? Met vijf? En tien?

32) Suppose that a undirected graph G contains two distinct simple paths from a vertex u to a vertex v. Show that G has a cycle.
Geldt de bewering ook voor gerichte grafen? Voor paden die niet simpel hoeven te zijn?

33) Let G be a connected graph. Prove:

a. If G contains a cycle C which contains an edge e; then $G - e$ is still connected.

b. If $e = \{u, v\}$ is an edge such that $G - e$ is disconnected, then u and v belong to different components of $G - e$.

34) Prove Theorem 8.11: The following are equivalent for a graph G:
(i) G is 2-colorable. (ii) G is bipartite. (iii) Every cycle of G has even length.

35) De taal L over $\{a, b\}$ wordt als volgt inductief gedefinieerd:

i. $a \in L$, $b \in L$,
ii. als $x \in L$, dan $ax \in L$ en $xbb \in L$,
iii. L bevat geen andere woorden.

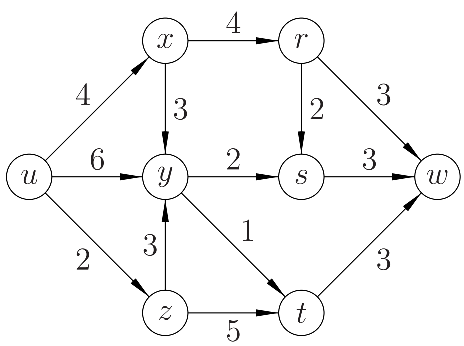
a. Laat zien dat de volgende woorden elementen van L zijn: *aa*, *bbb*, *abbb*, *abbbb*.

b. Beargumenteer dat de volgende woorden geen element van L zijn: *ba*, *bb*, *bbbb*. Welke eigenschap van woorden van L gebruikt u hierbij? Beredeneer die eigenschap.

c. Geef een beschrijving van L, zonder bewijs.

36) Een *topologische ordening* van een gerichte graaf $G = (V, E)$ is een volgorde $v_1, \dots, v_n$ van alle knopen van G zó dat als $(v_i, v_j) \in E$, dan $i < j$. (Je kunt de knopen van de graaf op een lijn tekenen waarbij alleen pijlen van de graaf van links naar rechts lopen.)

a. Bepaal een topologische sortering van onderstaande gerichte graaf.



b. Bewijs Theorem 9.8 van Schaum: Let S be a finite directed cycle-free graph. Then there exists a topological sort of the graph S.

37) **a.** Wat berekent de volgende functie (voor $y \geq 0$) ?

```
int func(int x, int y) {
  if (y) return x * func(x, y - 1);
  return 1;
} // func
```

b. Wat drukt `fibo(4)` af? Maak een boomstructuur die de functieaanroepen weergeeft. Wat is de lengte van de string afgedrukt door `fibo(8)`? Wat is het aantal `a`'s en `b`'s in die string?

```
void fibo(int depth) {
  switch (depth) {
    case 0:  cout << 'b'; return;
    case 1:  cout << 'a'; return;
    default: fibo(depth - 1); fibo(depth - 2);
  } //switch
} //fibo
```

38) Schrijf als sommatie, en bewijs met inductie naar n:

a. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$, $n\geq 1$.

b. $2+6+18+\cdots+2\cdot 3^n=3^{n+1}-1$, $n\geq 0$.

39) **a.** $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$, $n\geq 0$.

b. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2=(-1)^n\sum_{k=1}^{n} k$, $n\geq 0$.

c. $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\cdot(i+1)}=\frac{n}{n+1}$, $n\geq 0$.

40) Laat zien dat voor alle $n\in\mathbb{N}$ geldt dat $(1-a)^n\geq 1-na$ (als $0<a<1$).

41) Bewijs het *binomium van Newton*: $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^k y^{n-k})$.

42) Bewijs de beweringen die over de Fibonacci getallen gedaan zijn in het dictaat.

a. $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$, de Formule van Binet

b. $\sum_{k=1}^{n}F_k=F_{n+2}-1$

c. $\sum_{k=1}^{n}F_k^2=F_nF_{n+1}$

43) Fibonacci getallen en matrixvermenigvuldiging. Voor de dapperen.

a. Neem $Q=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$. Laat zien dat $Q^n=\begin{pmatrix}F_{n+1}&F_n\\F_n&F_{n-1}\end{pmatrix}$ voor $n\geq 1$.

b. $F_{2n}=F_{n+1}^2-F_{n-1}^2$, $F_{2n+1}=F_{n+1}^2+F_n^2$

c. $F_{2n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k$

44) De *Lucas getallen* worden inductief gedefinieerd door $L_0=2$, $L_1=1$, en voor $n\geq 0$, $L_{n+2}=L_n+L_{n+1}$; dwz. als de Fibonacci getallen, maar met andere startwaarden. Laat zien dat $L_{n+2}L_n-L_{n+1}^2=5(-1)^n$.

45) Hoe berekenen we een gevraagd Fibonacci getal F_n in logaritmische tijd, dwz. een aantal stappen dat evenredig is met $\log(n)$? Functie `fibo` uit het dictaat doorloopt haar loop ongeveer n keer, dus werkt in lineaire tijd. Gebruik Opgave 43b.

46) (*maart 2003*) De rij van Fibonacci wordt gegeven door $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ $(n\geq 1)$ met beginwaarden $F_0=0$ en $F_1=1$.

a. Bereken $\sum_{k=1}^{4}F_{2k}$.

b. Bewijs met inductie dat $\sum_{k=1}^{n}F_{2k}=F_{2n+1}-1$ voor alle $n\geq 1$.

c. Als we beginnen met de waarden $F_0=1$ en $F_1=3$, welke formule krijgen we bij **b.** ?

47) **a.** Beschrijf een recursieve functie voor aantal knopen van een binaire boom, door het geven van een basis f(blad) en een recursie f(knoop) uitgedrukt in f(links) en f(rechts).

b. Op dezelfde manier een functie die de hoogte van een binaire boom bepaalt.

c. Idem voor het maximum van waarden opgeslagen in de knopen van een binaire boom.

48) Een *derangement* van een verzameling S is een afbeelding $f : S \to S$ zó dat $f(x) \neq x$ voor alle $x \in S$. Informeel: een permutatie waarbij geen enkel element op zijn plaats blijft. Laat $d(n)$ het aantal derangementen op een verzameling van n elementen zijn.

a. Beredeneer dat $d(1) = 0$, $d(2) = 1$, en $d(n) = (n-1)(d(n-1) + d(n-2))$ voor $n \geq 3$.

b. Bewijs dat $d(n) = nd(n-1) + (-1)^n$ voor $n \geq 2$.

49) De taal L is inductief gedefinieerd door:

– $\lambda \in L$,

– als $x \in L$ dan ook axa en bxb in L.

a. Laat zien dat $L \subseteq \{\ w \cdot w^R \mid w \in \{a,b\}^*\ \}$,
waarbij w^R gelijk is aan w maar achterstevoren opgeschreven.

b. Bewijs omgekeerd dat $ww^R \in L$ voor elke $w \in \{a,b\}^*$.

50) De verzameling van Blurpsen is de kleinste verzameling zodat:

1. Δ is een Blurps.
2. Als x een Blurps is, dan zijn ook $x\Delta\Delta$ en $\diamond xx \diamond$ Blurpsen.
3. Als x en y Blurpsen zijn, dan is ook $x\Delta y$ een Blurps.

Laat zien dat alle Blurpsen een oneven aantal driehoekjes Δ hebben of ten minste één ruit $\diamond$ bevatten.

Opgave gevonden op internet: `http://www.phil.uu.nl/~lev/wiskai.html`

51) *Programmeerwedstrijd Studievaardigheden, voorjaar 2003*

In de gevangenis voor levensgevaarlijke criminelen moeten de gevangenen van het ene celblok naar het andere gebracht worden. Dat geschiedt door een lange rij te vormen met criminelen (`C`) en bewakers (`B`). De gevangenen zijn zo gevaarlijk dat er nooit twee naast elkaar mogen staan, omdat er dan onmiddellijk anarchie uitbreekt. Verder zijn de bewakers zo lui dat ze, zodra er vier naast elkaar staan, ogenblikkelijk gaan klaverjassen. Dat moet dus worden voorkomen. De volgende rijen mogen bijvoorbeeld niet worden gevormd:

`C-B-B-C-C-B` : 2 criminelen naast elkaar: anarchie!

`C-B-B-B-B-C` : klaverjassen!

De volgende rij kan wel: `C-B-C-B-B-B-C-B-C-B-B-C-B-C-B-B-B-C`

Het gevangenishoofd heeft de opdracht gegeven om een rij van lengte N te maken en die over te brengen. “Ja, maar”, vraagt een van de bewakers, “op hoeveel manieren kan dat wel niet?”

Invoer, uitvoer en opdracht. De invoer staat in het bestand `gevang.in` en de uitvoer wordt geschreven in het bestand `gevang.uit`. Op elke regel van `gevang.in` staat een waarde N (met $4 \leq N \leq 50$). Schrijf een C++ programma dat gegeven deze N, steeds uitrekent hoeveel verschillende rijen van die lengte gemaakt kunnen worden. Dit antwoord wordt vervolgens steeds op een aparte regel in `gevang.uit` geschreven. Je hoeft geen rekening te houden met symmetrie, m.a.w. `C-B-B` en `B-B-C` worden geteld als verschillende rijen.

52) Draw all [undirected] trees with exactly six vertices.

53) **a.** $G = (V, E)$ is een ongerichte cykelvrije graaf met c componenten, een bos met c bomen dus. Bewijs dat $|V| = |E| + c$.

b. Laat zien dat hieruit Theorem 8.6 (ii) $\Rightarrow$ (iii) eenvoudig af te leiden is.

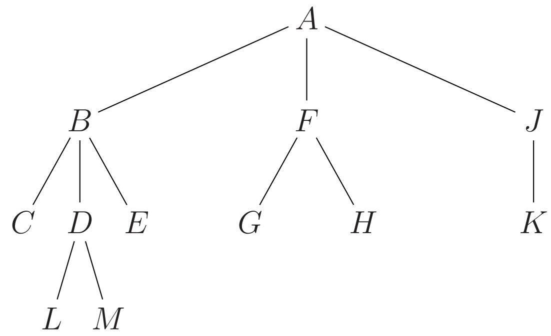
54) Consider the algebraic expression $E = \dfrac{(3x - 5z)^4}{a(2b + c^2)}$.

a. Draw the corresponding ordered rooted tree T, using an arrow ($\uparrow$) for exponentiation, an asterisk (*) for multiplication, and a slash (/) for division.

b. Use T to rewrite E in Polish prefix form.

c. Geef ook de postorde en symmetrische notatie.

55) **a.** Consider the general [rooted] tree T [hieronder]. Find the corresponding binary tree T'. [in eerste-kind-rechter-broer representatie]



b. Suppose T is a general tree with root R and subtrees $T_1, T_2, \ldots, T_M$. The postorder traversal of T is defined as follows:
(1) Traverse the subtrees $T_1, T_2, \ldots, T_M$ in postorder.
(2) Process the root R.

Let T be the general tree [hierboven]. Traverse T in postorder.

c. Geef een definitie voor algemene 'preorder traversal', en bepaal deze voor T.

d. Consider the binary tree T' [uit onderdeel a]. Find the preorder, inorder, and postorder traversals of T'. Compare these traversals with the preorder and postorder traversals (which where obtained [in onderdeel b.]) of the corresponding general tree T.

56) **a.** Teken de vijf binaire bomen met drie knopen.

b. Als t_n het aantal binaire bomen is met n knopen, dan geldt de recurrente betrekking $t_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} t_k t_{n-k}$, met $t_0 = 1$. Leg dit uit.

c. Hoeveel binaire bomen met 6 knopen zijn er?

57) **a.** Zet een volledig stel haakjes in de expressie $1 - 2 - 3 - 4$.
Op hoeveel manieren kan dat?

b. Idem voor $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7$.

58) Bepaal steeds een woord van minimale lengte *niet* in de taal.

a. $1^*\{01\}^*0^*$

b. $(0^* \cup 1^*)(0^* \cup 1^*)(0^* \cup 1^*)$

c. $\{0\}^* \cdot (\{10\} \cdot \{0\}^*)^* \cdot \{1\}^*$

d. $1^*\{0, 10\}^*1^*$

59) Bereken L^2 voor de volgende talen:
$L = \{\lambda\}$, $L = \{ \lambda, a \}$, $L = \{ a, b, ab \}$, $L = \varnothing$, $L = \{aa\}^*$.

60) Bewijs de volgende implicaties, of geef een tegenvoorbeeld.

a. Als $L = L^2$, dan is $\lambda \in L$.

b. Als $L = L^2$, dan is $L = L^n$ voor $n \geq 2$.

c. Als $L = L^2$, dan is $L = L^*$.

d. Als $K^2 = L^2$ dan $K = L$

e. Als $K^* \subseteq L^*$ dan $K \subseteq L$

61) Onderzoek de volgende gelijkheden; K, L, M zijn talen over Σ.

a. $(K^*)^n = (K^n)^*$, voor $n \in \mathbb{N}$

b. $(KL)^* = (LK)^*$

c. $(K - L)M = KM - LM$

d. $(K^*L^*)^* = (L^*K^*)^*$

e. $(K^c)^* = (K^*)^c$

f. $(K^*L)^*K^* = (K^* \cup L^*)^*$

62) Gegeven de inductieve definitie van een taal L:
i. $\lambda, a \in L$,
ii. als $x \in L$, dan $xb, xba \in L$,
iii. L bevat geen woorden anders dan door (i) en (ii) geconstrueerd.
Laat zien dat L precies de taal is van woorden zonder subwoord aa.

63) Gebruik taal-bewerkingen om de volgende talen over $\Sigma = \{ a, b \}$ te verkrijgen uit eindige talen. Als voorbeeld: de verzameling woorden van even lengte is $\{ aa, ab, ba, bb \}^*$.

a. De verzameling woorden van oneven lengte.

b. De woorden met precies één voorkomen van de letter a.

c. De woorden die beginnen met een a of eindigen met twee b's (of allebei).

d. De woorden met tenminste drie opeenvolgende a's.

e. De woorden met het subwoord $bbab$.

64) De taal $L \subseteq \{0, 1\}^*$ wordt recursief gedefinieerd door:
(i) $01, 10 \in L$
(ii) als $x \in L$, dan is $xx^R \in L$,
(iii) L bevat geen andere woorden.

a. Ga voor de volgende woorden na of ze al dan niet tot L behoren:
0110, 1010, 01010, 01011010

Laat $K = \{ 01, 10 \} \cup \{w \in \{01, 10\}^+ \mid w = w^R \}$.

b. Bewijs met inductie dat $L \subseteq K$.

c. Is $K = L$? Beargumenteer uw antwoord.

65) Ga voor de volgende relaties op $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ na of ze reflexief, irreflexief, symmetrisch, antisymmetrisch of transitief zijn. Geef een toelichting.

a. xRy als $x \mid y$.

b. xRy als $x = 2y$.

c. xRy als $x^2 \geq y$.

66) Let A be the set of nonzero integers and let $\approx$ be the relation on $A \times A$ defined by $(a, b) \approx (c, d)$ whenever $ad = bc$. Prove that $\approx$ is an equivalence relation. **Sch:2.15**

67) Op welke dag valt 29 februari 2016? (1 januari 2000 valt op zaterdag)

68) Zij $a(m)$ de alternerende som van de cijfers van een getal m in het tientallig stelsel. Bewijs dat $m \equiv a(m) \pmod{11}$.
Uitleg: als $c_k c_{k-1} \cdots c_0$ de representatie van m in het tientallig stelsel is, dan is $a(m) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots + (-1)^k c_k$.

Een restklasse $\overline{x} \in \mathbb{Z}_m$ heet *inverteerbaar* als er een restklasse $\overline{y}$ bestaat met $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{1}$.

69) Bepaal de inverteerbare restklassen modulo 7 en bepaal van alle inverteerbare restklassen de inverse. Idem modulo 10.

70) **a.** Maak een optel- en vermenigvuldigingstabel van $\mathbb{Z}_4$

b. Bepaal de inverteerbare restklassen van $\mathbb{Z}_4$

c. Laat zien dat $\overline{x}^4 = \overline{x}^2$ voor elke $\overline{x} \in \mathbb{Z}_4$.

d. Bewijs dat $x^4 - x^2$ deelbaar is door 4 voor elke $x \in \mathbb{Z}$.

71) **a.** Laat zien dat $\overline{x}^{12} = \overline{1}$ voor elke $\overline{x} \in \mathbb{Z}_{13}$ met $\overline{x} \neq \overline{0}$.
Aanwijzing: wanneer je geen electronica gebruikt, dan is het handig om voor elke $\overline{x}$ achtereenvolgens $\overline{x}^2$, $\overline{x}^3$, $\overline{x}^6$, $\overline{x}^{12}$ te berekenen.

b. Bepaal de rest van $100^{100} + 1000^{1000}$ bij deling door 13.

72) Laat zien dat de volgende verzamelingen aftelbaar zijn:

a. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ (x, y) \mid x \in \mathbb{N},\, y \in \mathbb{N} \}$

b. Σ^* is aftelbaar, voor een alfabet Σ.

c. De verzameling eindige rijtjes gehele getallen.

73) Laat zien:

a. Als er een injectieve functie $f : A \to \mathbb{N}$ bestaat, dan is A aftelbaar.

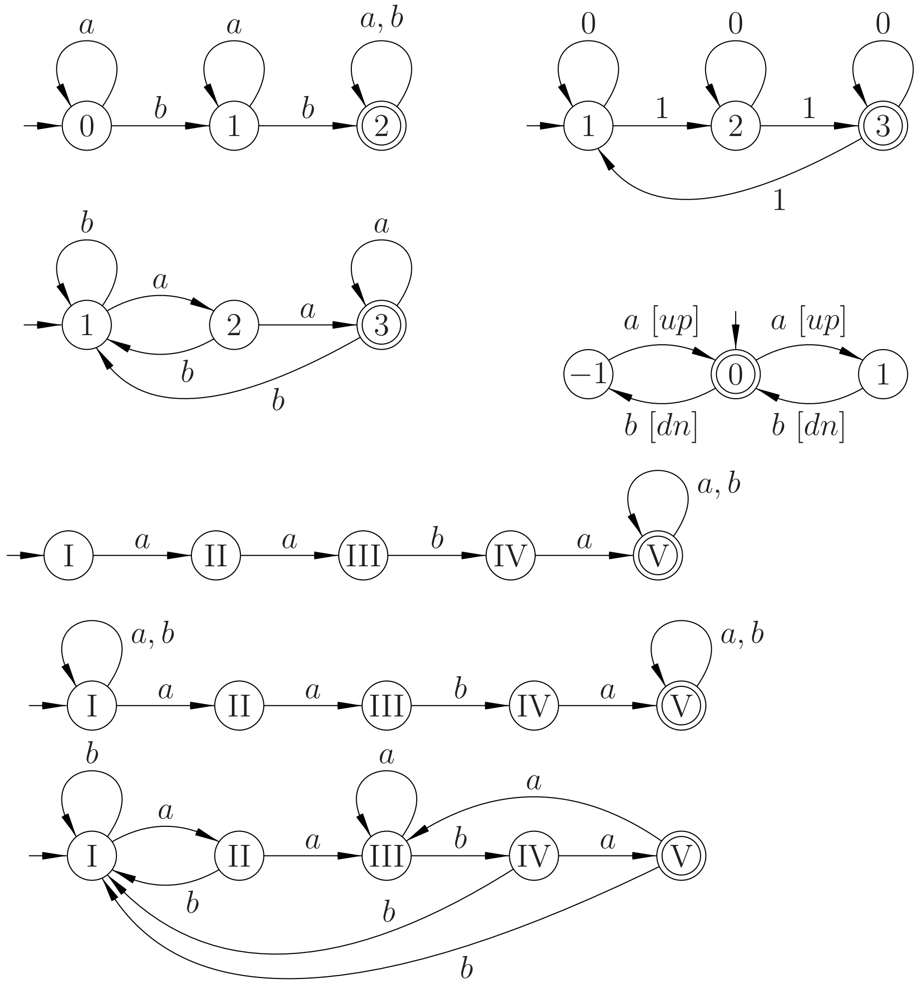
b. Elke deelverzameling van een aftelbare verzameling is aftelbaar.

74) De volgende verzamelingen zijn niet aftelbaar.

a. De verzameling bestaande uit alle oneindige rijtjes nullen en enen; dat is meer formeel de verzameling van alle functies van $\mathbb{N}$ naar $\{0, 1\}$.

b. De verzameling van talen over het alfabet $\{0, 1\}$.

75) Getekend is steeds een eindige automaat. Welke taal representeert de automaat? Is de automaat deterministisch? Kan de automaat deterministisch gemaakt worden door takken en toestanden toe te voegen?



76) Bepaal steeds een eindige automaat met alfabet $\{\ 0,1\ \}$. Probeer (ook) een deterministische automaat te geven. De taal bestaat uit de woorden …

a. met precies twee 0-en.
b. die *niet* op 01 eindigen.
c. *zonder* deelwoord 00.
d. met een even aantal 0-en.
e. waarin elke 0 direct gevolgd wordt door 11.
f. die zowel 11 en 010 als deelwoord bevatten.
g. waarvan de twee-na-laatste letter een 0 is.
h. met ten hoogste twee voorkomens van het deelwoord 00 (waarbij 000 reeds twee voorkomens telt).