Aanvulling bij werkcollege 9: talen

Bij opgave 61a.
Lemma 4.7 (dictaatje 4.1; sheet 32 college 10):
Laat K een taal zijn over een alfabet Σ. Dan geldt:

(ii) $(K^*)^n = K^*$, voor $n \geq 1$.

(iii) $(K^*)^* = K^*$.

Bewijs:
(ii) Voor $n = 1$ staat er gelijkheid omdat de eerste macht van een taal gelijk is aan de taal zelf. Het geval $n = 2$ behandelen we eerst apart. Neem een willekeurige $x \in \Sigma^*$. Er geldt: $x \in K^* \cdot K^*$ $\iff$ $x = yz$ voor zekere $y \in K^*$ en $z \in K^*$ $\iff$ $x = yz$ voor zekere $y \in K^i$ en $z \in K^j$ en i, j (geheel, ≥ 0) $\iff$ $x \in K^i \cdot K^j$ voor zekere i, j (geheel, ≥ 0) $\iff$ $x \in K^{i+j}$ voor zekere i, j (geheel, ≥ 0) $\iff$ $x \in K^m$ voor zekere m (geheel, ≥ 0) $\iff$ $x \in K^*$.
Nu bewijzen we de bewering met inductie naar n. De basis hebben we al gehad. De inductieaanname zegt dat $(K^*)^n = K^*$ voor zekere n. We moeten laten zien dat dan ook $(K^*)^{n+1} = K^*$. Voor $n \geq 1$ geldt $(K^*)^{n+1} = (K^*)^n \cdot K^* = K^* \cdot K^* = K^*$. Hier gebruiken we eerst de definitie, vervolgens de inductieaanname en ten slotte het geval $n = 2$.
Omdat we hier de gelijkheid $K^* \cdot K^* = K^*$, dwz. de bewering voor $n = 2$ steeds expliciet gebruiken is deze apart bewezen.
(iii) Dit volgt direct uit de definitie van $(K^*)^*$ en (ii) hierboven.

Opgave 61d.
Er geldt *niet*: als $K^2 = L^2$ dan $K = L$.
Een tegenvoorbeeld: neem $K = \{\lambda, a, a^3, a^5, a^7, \ldots\}$ en $L = \{a\}^* = \{\lambda, a, a^2, a^3, a^4, a^5, \ldots\}$. Dan is $K \neq L$, maar $K^2 = \{\lambda, a, a^2, a^3, a^4, a^5, \ldots\} = \{a\}^* = L^2$.
En een eindig tegenvoorbeeld: $K = \{\lambda, a, a^2, a^3, a^4\}$ en $L = \{\lambda, a, a^3, a^4\}$, dan $K^2 = L^2 = \{\lambda, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8\}$.

Opgave 64b.
basis. Zowel 01 als 10 behoren tot K.
inductiestap. Stel x zit in L. De *inductieaanname* is dat x tot K behoort.
Uit x construeren we xx^R in L volgens stap (ii) van de inductieve/recursieve definitie. We moeten nu laten zien dat $xx^R \in K$. We moeten dus aantonen dat (1) $xx^R \in \{01, 10\}^+$ en (2) $xx^R = (xx^R)^R$.
(1) Volgens de inductieaanname is $x \in \{01, 10\}^+$. Hetzelfde geldt dan voor x^R, en dus ook voor xx^R.
(2) Er geldt dat $(yz)^R = z^R y^R$, dus: $(xx^R)^R = (x^R)^R(x)^R = xx^R$ en voldoet derhalve aan de eigenschap voor woorden uit K.We gebruiken hier dat $(x^R)^R = x$. We hebben voor (2) de inductieaanname dus niet nodig.
Merk op dat x^R hetzelfde is als $\texttt{mir}(x)$.