Complexiteit

Uitwerkingen Opgaven

opgave 67
a. Definieer $T(\mathcal{G}) = \phi_{\mathcal{G}}$ zoals in de opgave. We moeten dan laten zien:

(1) De constructie van $T(\mathcal{G})$ uit $\mathcal{G}$ kan in polynomiale tijd: $O(|\mathcal{G}|^k)$ voor zekere k

(2) De knopen van $\mathcal{G}$ kunnen met hooguit 3 kleuren gekleurd worden (waarbij buren verschillend gekleurd zijn) $\Longleftrightarrow$ er is een waardering (waarheidstoekenning) die $\phi_{\mathcal{G}}$ waarmaakt

(1) Voor elke $\mathcal{G}$ wordt per *knoop* en per *tak* een *viertal* respectievelijk *drietal* clausules gemaakt van elk twee of drie literals. Die worden samengesteld (conjunctie) tot $\phi_{\mathcal{G}}$. Loop de knopen en hun buurlijsten af (laat $\mathcal{G}$ bijvoorbeeld m.b.v. de adjacency list gerepresenteerd zijn). Geef voor elke knoop de bijbehorende clausules, en idem voor elke tak. Per knoop/tak is dat $O(1)$. (Per tak moeten de bijbehorende clausules één keer voorkomen, dus schrijf de clausules voor de tak (v, w) bijvoorbeeld alleen op het moment dat je w tegenkomt in de buurlijst van v en $v < w$.) De hoeveelheid werk is dus $O(|V|+|E|) \subseteq O(|\mathcal{G}|)$. Conclusie: de constructie is polynomiaal.

(2) "$\Longrightarrow$": Laat $\mathcal{G}$ een graaf zijn die 3-kleurbaar is, d.w.z. er bestaat een goede kleuring van de knopen. Zij $c : V \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ dan zo'n 3-kleuring voor $\mathcal{G}$. Definieer nu de waardering w_c door: $w_c(v_i) =$ True dan en slechts dan als $c(v) = i$. (Ter herinnering: v_1, v_2, v_3 zijn de logische variabelen corresponderend met de knoop v.) Dus de kleur van knoop v bepaalt de waarheidswaarde van de bijbehorende variabelen v_1, v_2, v_3. Als v bijvoorbeeld kleur 3 heeft krijgt v_3 de waarde True en v_1 en v_2 worden False.
Omdat c een 3-kleuring is van $\mathcal{G}$, wordt $\phi_{\mathcal{G}}$ waargemaakt door w_c. Immers: (i) elke knoop heeft een kleur, dus elke ϕ_v^1 wordt waargemaakt door w_c, (ii) elke knoop heeft precies één kleur, dus alle $\phi_v^2, \phi_v^3, \phi_v^4$ worden waargemaakt door w_c, (iii) voor elke tak (v, w) geldt dat $c(v) \neq c(w)$, dus alle $\phi_e^1, \phi_e^2, \phi_e^3$ worden waargemaakt door w_c. Dus: er is een waardering die $\phi_{\mathcal{G}}$ waarmaakt, namelijk de boven gedefinieerde waardering w_c.
"$\Longleftarrow$": Neem nu aan dat er een waarmakende waardering is voor $\phi = \phi_{\mathcal{G}}$. Zij w zo'n waardering die $\phi_{\mathcal{G}}$ waarmaakt. Definieer nu de kleurfunctie c_w voor $\mathcal{G}$ door: $c_w(v) = i$ dan en slechts dan als $w(v_i) =$ True. Omdat w $\phi_{\mathcal{G}}$ waarmaakt is c_w een 3-kleuring voor $\mathcal{G}$. Immers:

(i) Er zijn hooguit drie kleuren gebruikt: 3 logische variabelen per knoop, $i = 1, 2$ of 3, corresponderend met de kleuren,

(ii) Alle $\phi_v^1, \phi_v^2, \phi_v^3, \phi_v^4$ worden waargemaakt en daaruit volgt dat elke knoop precies één kleur heeft. Uit ϕ_v^1 is True volgt: ten minste één kleur; uit ϕ_v^2, ϕ_v^3 en ϕ_v^4 is True: nooit meer dan één kleur,

(iii) Alle $\phi_e^1, \phi_e^2, \phi_e^3$ worden waargemaakt, en hieruit volgt dat aangrenzende knopen verschillend gekleurd zijn. Namelijk voor tak (v, w) zijn v_j en w_j niet beide True ($j = 1, 2, 3$), dus v en w hebben niet beide kleur j ($j = 1, 2, 3$).

Conclusie: er bestaat een correcte 3-kleuring voor $\mathcal{G}$ (namelijk de voorgestelde c_w).

b. Er geldt: als $Q \leq_P P$ en Q is NP-volledig, dan is P NP-hard, en dus NP-volledig als tevens $P \in \mathcal{NP}$ (*). Uit **a.** volgt derhalve al niet eens dat 3Kleur NP-hard is, althans niet op grond van de stelling; 3Kleur zou bijvoorbeeld nog best in $\mathcal{P}$ kunnen zitten. Overigens is 3Kleur wel degelijk NP-volledig. Het volgt alleen niet uit de bekeken reductie.

Ter illustratie het volgende. Het analoge probleem 1Kleur is heel eenvoudig: het is hetzelfde als vragen of de graaf geen takken heeft. Duidelijk is dat 1Kleur $\in \mathcal{P}$. Een reductie van 1Kleur naar SAT ongeveer zoals in de opgave, is eenvoudig te maken: laat de stukken met v_2 en v_3 maar weg. Aldus is 1Kleur evenals 3Kleur te reduceren tot SAT, maar 1Kleur is daarentegen polynomiaal op te lossen.

Overigens: als de reductie de andere kant op was, dus SAT $\leq_P$ 3Kleur, dan zou hieruit (samen met **61.b.**) wel volgen dat 3Kleur NP-volledig was. Dit volgt direct uit (*) (of de stelling onderaan pagina 46 van het dictaat).

c. SAT is NP-volledig, dus voor alle $P \in \mathcal{NP}$ geldt: $P \leq_{\mathrm{P}}$ SAT. We zoeken echter een reductie de andere kant op: SAT $\leq_{\mathrm{P}}$ 3Kleur.
Stel dat SAT $\leq_{\mathrm{P}}$ 3Kleur, dan zou $P \leq_{\mathrm{P}}$ 3Kleur voor alle $P \in \mathcal{NP}$ omdat SAT NP-hard is en $\leq_{\mathrm{P}}$ transitief. Dus dan is 3Kleur NP-hard. Anderzijds: als 3Kleur NP-hard is, dan reduceren alle problemen uit $\mathcal{NP}$ (en dus ook SAT) in polynomiale tijd naar 3Kleur. Er geldt dus: zo'n reductie bestaat $\Longleftrightarrow$ 3Kleur is NP-hard.