Tweede college complexiteit

12 februari 2019

Wiskundige achtergrond

Agenda vanmiddag

- Floor, Ceiling
- Rekenregels logaritmen
- Tellen
- Formele definitie O, Ω, Θ met voorbeelden
- Stellingen over faculteiten
- Recurrente betrekkingen
- Binaire bomen

- $\lfloor x \rfloor$ = het grootste gehele getal $\leq x$

- $\lceil x \rceil$ = het kleinste gehele getal $\geq x$

Er geldt: $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$ en $\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n$ voor elk geheel getal $n \geq 0$.

Neem steeds $x > 0$ (en $y > 0$ in de laatste regel van het eerste punt)

- $\log_b x = y \iff b^y = x$ (grondtal b)

  $b^{\log_b x} = x \qquad \log_b b^y = y$

  $\log_b x^p = p \log_b x$

  $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y \qquad \log_b(\frac{x}{y}) = \log_b x - \log_b y$

- Er geldt: $\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$

- Notatie: $\lg x = \log_2 x$ en $\ln x = \log_e x$

Hieronder is n steeds een geheel getal ≥ 0, tenzij anders vermeld.

- $\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1 \quad (n \geq 1)$

- $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{als } n \text{ even} \\ \frac{n+1}{2} & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$

- $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{als } n \text{ even} \\ \frac{n-1}{2} & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$

- $\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n$

- $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$
- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$
- $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$
- $\sum_{i=a}^{b} q^i = \frac{q^a - q^{b+1}}{1-q}$ voor $q \neq 1$
- $\sum_{i=0}^{k-1} (i+1)2^i = (k-1)2^k + 1$

- Aantal rijtjes ter lengte k, te maken met de getallen (objecten) 1 t/m n als de volgorde van belang is, maar het rijtje niet uit verschillende getallen hoeft te bestaan: n^k
- Aantal rijtjes ter lengte k, te maken met de getallen 1 t/m n als de volgorde van belang is en het rijtje uit verschillende getallen moet bestaan*: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$
- Aantal permutaties van 1 t/m n (speciaal geval van het voorgaande met $k = n$): $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$
- Aantal manieren om k getallen uit n te kiezen ($k \leq n$). Nu is de volgorde niet van belang, maar de getallen moeten wel verschillend zijn: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
  Feitelijk tellen we hier het aantal deelverzamelingen van $\{1, 2, \ldots, n\}$ ter grootte k.

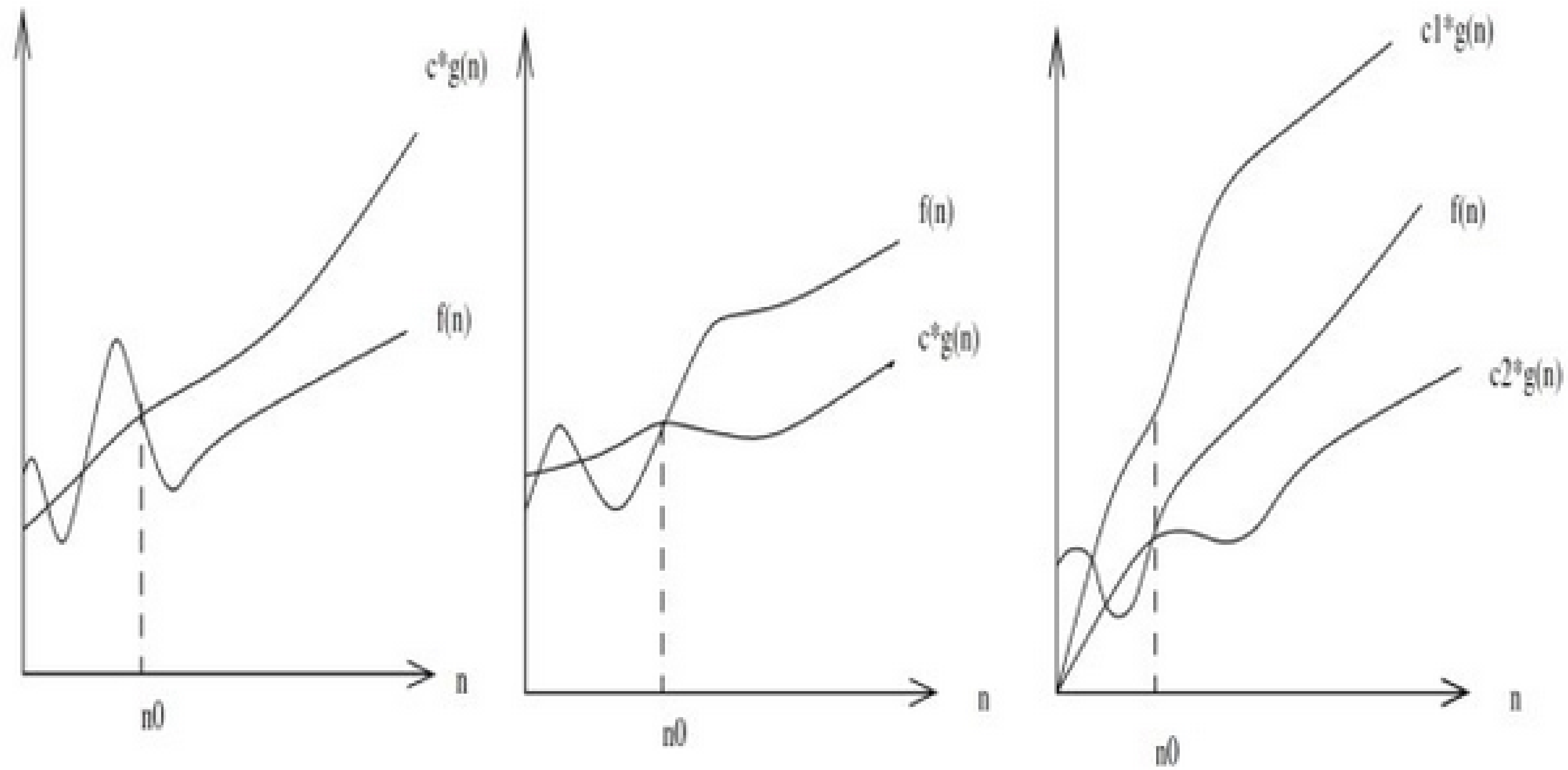
*dus moet $k \leq n$

$f, g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ (meestal $\mathbb{R}^+$)

1. $f \in O(g)$: er bestaan constanten c en n_0 (beide > 0) zodat $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ voor alle $n \geq n_0$: asymptotische bovengrens

2. $f \in \Omega(g)$: er bestaan constanten c' en n_0' (beide > 0) zodat $0 \leq c'g(n) \leq f(n)$ voor alle $n \geq n_0'$: asymptotische ondergrens

3. $f \in \Theta(g)$: er bestaan constanten c_1, c_2 en n_0'' (alle > 0) zodat $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ voor alle $n \geq n_0''$: asymptotisch gedrag



$f \in O(g)$	$f \in \Omega(g)$	$f \in \Theta(g)$
f groeit hooguit even hard als g	f groeit minstens even hard als g	f en g groeien even hard

Vaak zie je ook wel de wat slordige notatie met $f = O(g)$ in plaats van $f \in O(g)$. Hiermee wordt hetzelfde bedoeld, maar deze laatste notatie is wiskundig netter. Immers, $O(g)$ is eigenlijk een klasse van functies h die voldoen aan: $0 \leq h(n) \leq cg(n)$ vanaf zekere n.
Analoog voor Θ en Ω.

We gebruiken bij dit college dan ook de notaties $f \in O(g)$, $f \in \Theta(g)$ en $f \in \Omega(g)$.

Stelling

1. $f \in \Theta(g) \iff f \in O(g)$ en $f \in \Omega(g)$
2. $f \in O(g) \iff g \in \Omega(f)$
3. $f \in O(g)$ en $g \in O(h)$ dan $f \in O(h)$

Stelling

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \alpha$ met $0 < \alpha < \infty \Longrightarrow f \in \Theta(g)$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Longrightarrow f \in O(g)$, maar $g \notin O(f)$

   (ofwel $f \notin \Omega(g)$)

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Longrightarrow f \in \Omega(g)$, maar $f \notin O(g)$

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$ $\qquad$ $3n^3 + 6n^2 + 9 = \Theta(n^3)$

$42n \in O(n^2)$, maar NIET $42n \in \Omega(n^2)$

$2^n \in O(3^n)$, maar NIET $2^n \in \Omega(3^n)$

$\log_7 n \in \Theta(\lg n)$ $\qquad$ $C \in \Theta(1)$ (voor $C > 0$)

$0 \in O(1)$, maar NIET $0 \in \Omega(1)$

$\sum_{i=1}^{n} i \in \Theta(n^2)$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \in \Theta(\lg n)$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \in \Theta(1)$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{n} \lg i \in \Theta(n \lg n)$

$n! = 1 * 2 * 3 * \cdots * n$, dus $n! \leq n^n$

$n! \in \Omega(2^n)^{\dagger}$; $n! \in O(n^n)$;
derhalve: $\lg(n!) \in \Omega(n)$ en $\lg(n!) \in O(n \lg n)$

Voor $n \geq 2$ geldt dat $n! \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$ (te bewijzen stelling), dus:

$$\lg(n!) \geq \tfrac{n}{2}(\lg \tfrac{n}{2}) = \tfrac{n}{2}(\lg n - \lg 2) = \tfrac{n}{2}(\lg n - 1)$$

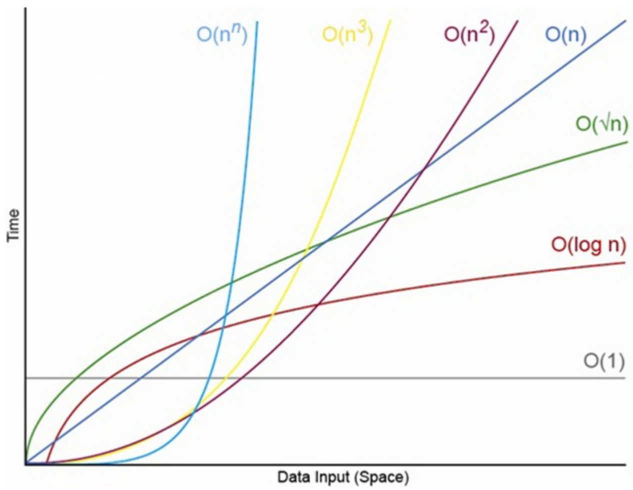
$$\geq \tfrac{n}{4} \lg n \text{ als } n \geq 4;\ \lg(n!) \in \Omega(n \lg n)$$

Hiermee bewezen: $\sum_{i=1}^{n} \lg i = \lg(n!) \in \Theta(n \lg n)$

Formule van Stirling: $n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(1 + \Theta(\frac{1}{n}))$

†maar NIET $n! \in O(2^n)$

$f \in \Theta(g)$: neem uit f de hoogste orde term, negeer alle lagere orde termen en de constante die voor de hoogste orde term staat $\longrightarrow g$.



$\Theta(1)$: constant

$\Theta(\lg n)$: logaritmisch

$\Theta(n)$: lineair

$\Theta(n^k)$ met $k > 0$: polynomiaal

$\Theta(2^n)$, $\Theta(a^n)$ met $a > 1$: exponentieel

In onderstaande tabel is te zien hoe snel enkele veel voorkomende functies toenemen als functie van n.

N	10	50	100	300	1000
$\log_2 N$	3	5	6	8	9
$5N$	50	250	500	1500	5000
$N \cdot \log_2 N$	33	282	665	2469	9966
N^2	100	2500	10 000	90 000	7 cijfers
N^3	1000	125000	7 cijfers	8 cijfers	10 cijfers
2^N	1024	16 cijfers	31 cijfers	91 cijfers	302 cijfers
$N!$	7 cijfers	65 cijfers	161 cijfers	623 cijfers	onvoorstelbaar
N^N	11 cijfers	85 cijfers	201 cijfers	744 cijfers	onvoorstelbaar

Vergelijk:

het aantal protonen in het heelal is een getal met 79 cijfers

het aantal microseconden sinds de oerknal is een getal met 24 cijfers

Polynomiaal: (meestal) binnen redelijke tijd klaar
Exponentieel: zeker niet in acceptabele tijd klaar

N	10	20	50	100	300
N^2	$\frac{1}{10000}$ sec	$\frac{1}{2500}$ sec	$\frac{1}{400}$ sec	$\frac{1}{100}$ sec	$\frac{9}{100}$ sec
N^5	$\frac{1}{10}$ sec	3,2 sec	5,2 min	2,8 uur	28,1 dag
2^N	$\frac{1}{1000}$ sec	1 sec	35,7 jaar	400 biljoen eeuwen	75 cijfers veel eeuwen
N^N	2,8 uur	3,3 biljoen jaar	70 cijfers veel eeuwen	185 cijfers veel eeuwen	728 cijfers veel eeuwen

executietijd bij miljoen stappen per seconde

Vergelijk: de oerknal was ongeveer 15 miljard jaar geleden

- Rij van Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$
- Vanaf het derde element: som van de voorgaande twee
- Een recurrente betrekking is een voorschrift om een waarde $T(n)$ te berekenen door middel van zijn voorganger(s), dus bijvoorbeeld $T(n-1)$, of $T(\frac{n}{2})$, of ...

Voor de Fibonacci-getallen geldt:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ T(n-1) + T(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

Een ander voorbeeld van een recurrente betrekking:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + n & n = 2^k > 1 \end{cases}$$

- Strategie: herhaalde substitutie en afleiden algemene vorm, of:

- Probeer wat termen door te rekenen: zie je een patroon?

- Bewijs de formule met volledige inductie

Oplossing: $T(n) = n + n \lg n \in \Theta(n \lg n)$

De vorige recurrente betrekking, maar nu voor algemenere n, dus niet alleen voor tweemachten:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n & n > 1 \end{cases}$$

Dan geldt: $T(n) \in O(n \lg n)$ (en overigens ook $T(n) \in \Theta(n \lg n)$).

Dit kan bewezen worden door met behulp van volledige inductie bijvoorbeeld aan te tonen dat $T(n) \leq 2n \lg n$ voor alle $n \geq 2$.

En ten slotte nog twee voorbeelden om op te lossen.

(i) $T(n) = \begin{cases} 3 & n = 1 \\ T(n-1) + n - 1 & n > 1 \end{cases}$

Oplossing: $T(n) = 3 + \frac{1}{2}n(n-1)$

(ii) $T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n} & n = 4^k > 1 \end{cases}$

Oplossing: $T(n) = \sqrt{n}\log_4 n \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{n}\lg n$

De volgende stelling geeft een verband aan tussen de hoogte van een binaire boom en het aantal knopen (resp. bladeren). We kiezen de definitie van niveau zo, dat de wortel op niveau 0 zit. De hoogte van de boom (= het hoogste niveau dat in de boom voorkomt) is dan gelijk aan het aantal niveaus - 1.

Stelling

Gegeven een binaire boom met n knopen (en b bladeren) en hoogte h. Dan geldt:

1. $h \geq \lceil \lg b \rceil$

2. $h \geq \lceil \lg(n+1) \rceil - 1 = \lfloor \lg n \rfloor$