**Fundamentele Informatica 1 & Foundations of Computer Science**
**Tussentijdse toets 21/10/2019, 11:00-13:00.**
**Kasper Dokter, Vedran Dunjko**
De toets bestaat uit 5 opgaven (1 pagina).
Als je $x$ punten behaalt, dan is je cijfer $x/5$.
Geef duidelijk aan welke vraag je beantwoordt.
**Belangrijk**: schrijf naam, studentnummer en de naam van het vak op je uitwerkingenblad.

Universiteit Leiden

**Opgave 1.** 10 P.

Teken de Venn diagrammen voor de volgende paren van verzamelingen; bepaal de relatie van het paar: d.w.z. zijn ze gelijk, is de één een deelverzameling van de ander, zijn ze disjunct of onvergelijkbaar (geen van de vorige relaties).

1. $(A \oplus B)^c$ and $A^c \oplus B$
2. $(A \oplus B) \cup C$ and $(A \cup C) \oplus (B \cup C)$

Hint: Teken een afzonderlijk Venn diagram voor elk van de vier uitdrukkingen en vergelijk de gearceerde delen.

**Opgave 2.** 10 P.

Gebruik de regels (axioma's) van de verzamelingenalgebra om de volgende uitdrukking zoveel mogelijk te vereenvoudigen:

$$((B^c \cup A)^c \cup B) \cup B.$$

**Opgave 3.** 6 P.

Bekijk de volgende binaire relatie $R$ gedefinieerd op $\{a, b, c, d\}$:

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (d, a), (d, b), (d, d), (c, c)\}.$$

Ga na of $R$ 1) reflexief; 2) symmetrisch; 3) antisymmetrisch; 4) transitief; 5) een equivalentierelatie; 6) een partiële ordening is. Onderbouw je antwoord en geef een tegenvoorbeeld, voor het geval de relatie niet aan eigenschap voldoet.

**Opgave 4.** 12 P.

Hoeveel getallen in $\{1, \dots, 300\}$ zijn niet deelbaar door 2, 3 of 5 (dus door geen van hen)? Vind het antwoord middels het principe van inclusie en exclusie. Gebruik een Venn-diagram om de relevante verzamelingen en hun relaties te illustreren.

Hints: Voor $p \in \mathbb{N}^+$, zij $D_p = \{k \in \{1, \dots, 300\} \mid p \text{ deelt } k\}$ de verzameling getallen tussen 1 en 300 die deelbaar zijn door $p$. Het aantal getallen in $\{1, \dots, 300\}$ dat deelbaar is door 2, 3 of 5 is gelijk aan $|D_2 \cup D_3 \cup D_5|$ (waarin $|A|$ het aantal elementen van $A$ is, d.w.z., de kardinaliteit van $A$).
Merk op dat $|D_p| = \frac{300}{p}$, als $p$ een deler van 300 is, en $D_p \cap D_q = D_{p \times q}$, als $p$ and $q$ relatief priem zijn (d.w.z., ze hebben geen gemeenschappelijke delers). In het bijzonder, voor $p, q \in \{2, 3, 5\}$ en $p \neq q$, is een getal deelbaar door $p$ en $q$ dan en slechts dat als het een veelvoud van $p \times q$ is.

**Opgave 5.** 12 P.

Zij $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en $B = \{a, b, c, d\}$.

1. Het is mogelijk om functies $f : A \to B$ te vinden waarvoor er een deelverzameling $V \subseteq A$ bestaat zodanig dat $f^{-1}(f(V)) \neq V$. Geef een dergelijke functie $f$ door alle paren $(x, f(x))$ te specificeren (dus geef de verzameling $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$) en geef hierbij ook de corresponderende verzameling $V$.
2. Het is mogelijk om functies $g : A \to B$ te vinden waarvoor er een deelverzameling $W \subseteq B$ bestaat zodanig dat $g(g^{-1}(W)) \neq W$. Geef een dergelijke functie $g$ door alle paren $(x, g(x))$ te specificeren (dus geef de verzameling $\{(x, g(x)) \mid x \in A\}$) en geef hierbij ook de corresponderende verzameling $W$.
3. Bepaal of $f$ en $g$ injectief en/of surjectief zijn.

Merk op dat een functie totaal is; ze heeft een waarde voor elk element in haar domein.