Foundations of Computer Science
Final Exam 9/1/2020
Vedran Dunjko, Kasper Dokter

Universiteit Leiden

Write your name, number, *and* course (FI1 or FoCS) on your exam sheet.

The exam text is in English. You should answer the questions either in English or in Dutch. For all answers you should be concise!
This exam consists of 8 questions (1 page). Mark each answer with the question number and use a new page for each of the answers. The score is indicated per question. The exam starts at 14.00 and ends at 17.00 hrs.
Participation in the exam requires being present for at least 1 hrs.
Electronic devices are not allowed and must be stowed.

Question 1. 12 P.

a) Show using Venn diagrams that $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

b) Show using the laws of set algebra that $(A \cup B) \cap A^c = (B^c \cup A)^c$.

Question 2. 12 P.

a) Formulate the principle of inclusion and exclusion for counting the elements of the union $A \cup B$.

b) Consider the language

$$L = \{w \in \{0,1\}^8 \mid \text{the first 2 bits of } w \text{ are 1, or } w \text{ has exactly 4 bits equal to 1, or both}\}$$

For example, 11000000, 00001111, and 11001100 are words in L.
Determine the cardinality (set size) $|L|$ of L; you can use the principle of inclusion and exclusion.

Question 3. A d-regular graph, $d \geq 0$, has only vertices of degree d. 10 P.

a) Construct a bipartite, 3-regular graph G, and show that G is bipartite by partitioning the vertices into 2 parts.

b) Does G have an Euler circuit? Explain your answer.

Question 4. Let $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be functions, and let $+$ and $\times$ be the standard addition and multiplication, respectively. 10 P.
Prove or give a counterexample for the following statements:

a) If f and g are bijective, then $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined as $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, for all $x \in \mathbb{R}$, is bijective.

b) If f and g are bijective, then $f \times g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined as $(f \times g)(x) := f(x) \times g(x)$, for all $x \in \mathbb{R}$, is bijective.

Question 5. Consider a natural number $a \in \mathbb{N}$ consisting of the digits $d_k d_{k-1} \cdots d_0$, with $d_i \in \{0, \ldots, 9\}$ for $0 \leq i \leq k$. 10 P.
For example, $a = 538$ has digits $d_2 = 5$, $d_1 = 3$, and $d_0 = 8$.
Show that a is divisible by 11 if and only if $d_0 - d_1 + \cdots + (-1)^k d_k$ is divisible by 11.

Question 6. Prove by induction that $n! > 2^n$, for all $n \geq 4$. 15 P.

Question 7. Consider the expression D given as 16 P.

$$p + \sqrt{q + \sqrt{r} + p}$$

over the variables p, q, and r, where $+$ is a binary operator, and $\sqrt{\ }$ is a unary operator.

a) Draw the syntax/expression tree of D.

b) Find the corresponding binary tree in left-child right-sibling representation.

c) Write D in Polish notation (prefix notation).

d) Compute the expression $3\ 4\ \times\ 5\ 6\ \times\ +$, which is given in postfix notation.

Question 8. Given the language 15 P.

$$K = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ starts with a 1, or } w \text{ does } \textit{not} \text{ end in a 1, or both}\}.$$

a) Which of the following words are in K? λ, 0, 1, 00, 01, 10, and 11.

b) Give a deterministic finite automaton that accepts K.

c) Give a regular expression that defines K.

Fundamentele Informatica 1
Tentamen 9/1/2020
Vedran Dunjko, Kasper Dokter

Schrijf je naam, nummer, *en* cursus (FI1 of FoCS) op je uitwerkingenblad.

Dit tentamen is in het Nederlands. Je mag in het Nederlands of het Engels antwoorden.
In elk geval moeten je antwoorden kort en bondig zijn. Dit tentamen bestaat uit 8 opgaven (1 pagina).
Noteer bij elk antwoord het nummer van de opgave, en gebruik een nieuwe pagina voor elk antwoord.
De score is aangegeven per vraag. Het tentamen begint om 14.00 en eindigt om 17.00 uur.
Deelname aan het tentamen vereist minimaal een uur aanwezigheid.
Electronische apparaten zijn niet toegestaan en moeten worden opgeborgen.

Opgave 1. 12 P.

a) Toon met Venn diagrammen aan dat $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

b) Toon met de regels van de verzamelingenalgebra aan dat $(A \cup B) \cap A^c = (B^c \cup A)^c$.

Opgave 2. 12 P.

a) Formuleer het principe van inclusie en exclusie voor het tellen van de elementen van de vereniging $A \cup B$.

b) Bekijk de taal

$$L = \{w \in \{0,1\}^8 \mid \text{de eerste 2 bits van } w \text{ zijn 1, of } w \text{ heeft precies 4 bits gelijk aan 1, of beide}\}$$

Bijvoorbeeld, 11000000, 00001111, en 11001100 zijn woorden in L.

Bepaal de cardinaliteit (verzamelingsgrootte) $|L|$ van L; je kan het principe van inclusie en exlusie gebruiken.

Opgave 3. Een d-reguliere graaf, $d \geq 0$, heeft alleen punten van graad d. 10 P.

a) Geef een bipartiete, 3-reguliere graaf G, en laat zien dat G bipartiet is door de punten in 2 delen te verdelen.

b) Heeft G een Eulercircuit? Leg uit.

Opgave 4. Zij $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functies, en zij $+$ and $\times$ achtereenvolgens de standaard optelling en vermenigvuldiging. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld voor de volgende uitspraken: 10 P.

a) Als f en g bijectief zijn, dan is $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, met $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, voor alle $x \in \mathbb{R}$, ook bijectief.

b) Als f en g bijectief zijn, dan is $f \times g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, met $(f \times g)(x) := f(x) \times g(x)$, voor alle $x \in \mathbb{R}$, ook bijectief.

Opgave 5. Gegeven een natuurlijk getal $a \in \mathbb{N}$ bestaande uit de decimalen $d_k d_{k-1} \cdots d_0$, met $d_i \in \{0, \ldots, 9\}$ voor $0 \leq i \leq k$. Bijvoorbeeld, $a = 538$ heeft decimalen $d_2 = 5$, $d_1 = 3$, en $d_0 = 8$. 10 P.

Bewijs dat a deelbaar door 11 is dan en slechts dan als $d_0 - d_1 + \cdots + (-1)^k d_k$ deelbaar door 11 is.

Opgave 6. Bewijs met inductie dat $n! > 2^n$, voor alle $n \geq 4$. 15 P.

Opgave 7. Bekijk de uitdrukking D gegeven door 16 P.

$$p + \sqrt{q + \sqrt{r + p}}$$

over de variabelen p, q, en r, waarin $+$ een binaire operator is, en $\sqrt{}$ een unaire operator is.

a) Teken de syntax-/expressieboom van D.

b) Bepaal de corresponderende binaire boom in eerste-kind-rechter-broer representatie.

c) Schrijf D in Poolse notatie (prefix notatie).

d) Bereken de uidrukking $3\ 4\ \times\ 5\ 6\ \times\ +$ die gegeven is in postfix notation.

Opgave 8. Gegeven de taal 15 P.

$$K = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ begint met een 1, of } w \text{ eindigt } \textit{niet} \text{ met een 1, of beide}\}.$$

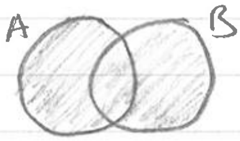
a) Welke van de volgende woorden zijn in K? λ, 0, 1, 00, 01, 10, and 11.

b) Geef een deterministische eindige automaat die K accepteert.

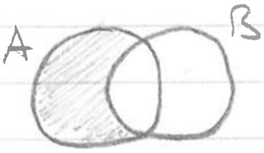
c) Geef een reguliere expressie die K definieert.

FoCS/FI1 Final Exam jan 2020

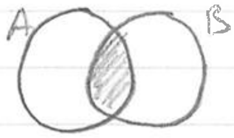
1 a



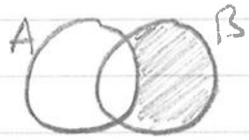
$A \cup B$



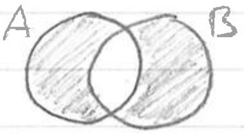
$A \setminus B$



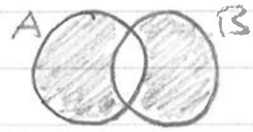
$A \cap B$



$B \setminus A$



$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$



$(A \setminus B) \uplus (B \setminus A)$

$$\therefore (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

b $(A \cup B) \cap A^c$

$= (A \cap A^c) \cup (B \cap A^c)$ (distributivity)

$= \phi \cup (B \cap A^c)$ (complement)

$= B \cap A^c$ (identity)

$= (B^c)^c \cap A^c$ (double complement)

$= (B^c \cap A)^c$ (De Morgan)

2 a For any two finite sets A and B, we have

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

b Let $A = \{ w \in \{0,1\}^8 \mid$ the first 2 bits of w are $1 \}$

and $B = \{ w \in \{0,1\}^8 \mid w$ has 4 bits equal to $1 \}$

Then, $A \cap B = \{ w \in \{0,1\}^8 \mid$ first 2 bits of w are 1, and 2 more$\}$.

Hence, we have

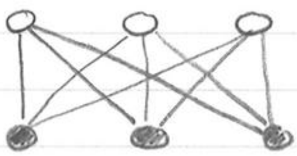
$$|A| = 2^6, \quad |B| = \binom{8}{4}, \quad |A \cap B| = \binom{6}{2}$$

The principle of inclusion and exclusion yields:

$$|L| = |A \cup B| = 2^6 + \binom{8}{4} - \binom{6}{2} = 64 + \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} - \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 64 + 70 - 15$$

$$= 119$$

3 a



The colors determine the partitioning.

b G does ~~not~~ have an Eulercircuit, because there exist vertices of odd degree.

4 a Counterexample: $f(x)=x$, $g(x)=-x$.
f and g are clearly bijective, but
$(f+g)(x) = x-x = 0$
is not surjective and not bijective.

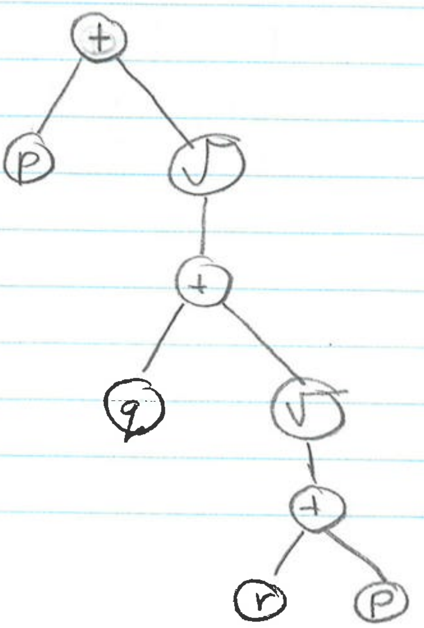
b Counterexample: $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x}$, if $x\neq 0$, $g(0)=0$
f and g are clearly bijective, but
$(f\times g)(x) = x \times \frac{1}{x} = 1$, for $x \neq 0$
$(f\times g)(0) = 0\times 0 = 0$
is not surjective and not bijective.

5 Consider $a=\sum_{i=0}^{k} 10^i \cdot d_i$. Then,

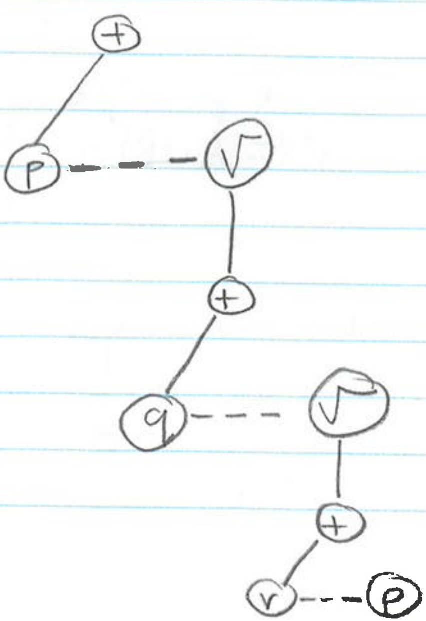
a is divisible by 11 $\Leftrightarrow$ $a \equiv 0 \pmod{11}$
$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} 10^i d_i \equiv 0 \pmod{11}$
$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} (-1)^i d_i \equiv 0 \pmod{11}$
$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} (-1)^i d_i$ is divisible by 11
$\Leftrightarrow d_0 - d_1 + \cdots + (-1)^k d_k$ is divisible by 11

6 We prove by induction that $n! > 2^n$, for all $n \geq 4$.
basis $(n=4)$ We have $4! = 24 > 16 = 2^4$.
hypothesis Suppose that $k! > 2^k$, for some $k \geq 4$. Then,
step $(k+1)! = (k+1)\cdot k! \underbrace{\geq}_{k\geq 4} 2\cdot k! \underbrace{>}_{\text{by hypothesis}} 2\cdot 2^k = 2^{k+1}$
conclusion $n! > 2^n$ $\forall n \geq 4$.

7 a



b



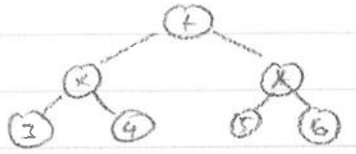
7 c $+ \, p \, \surd \, + \, q \, \surd \, + \, r \, p$

d

3	[3]
4	[3,4]
×	[12]
5	[12,5]
6	[12,5,6]
×	[12,30]
+	[42]

So, the expression evaluates to 42.

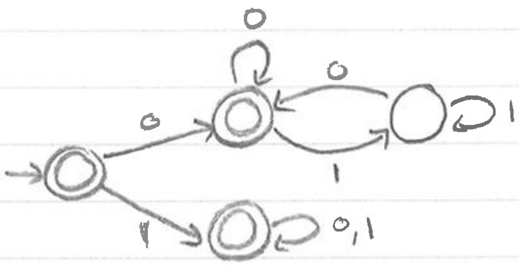
OR



$\Rightarrow (3 \cdot 4) + (5 \cdot 6)$
$= 42$

8 a $\{\lambda, 0, 1, 00, 10, 11\} \subseteq K$

b



c $1(0+1)^* + (0+1)^*0 + \lambda$