23.09

1) De waarheidstabel wordt

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg q \to p$	
T	T	T	F	T	⟵
T	F	F	T	T	
F	T	T	F	T	⟵
F	F	T	T	F	

Er zijn twee rijen (aangegeven met ⟵) waar zowel $p \to q$ als $\neg q \to p$ true zijn (de beide 'premises'). In die twee rijen is ook de rechterkant q van de semantic entailment true. De semantic entailment is dus geldig.

23.14

2 (a)

In regel 5 moet rechts staan: $\vee i_R$ 4

In regel 6 moet rechts staan: $\neg e$ 5,3

In regel 7 kun je niet $\perp$ concluderen, en al helemaal niet met $\neg e$ 6. Je zou wel $\neg\neg p$ kunnen concluderen met $\neg i$ 4-6

In regel 8 moet rechts staan: $\neg i$ 3-7

23.22

(b)

(i)

1.	$r \wedge p$	premise
2.	$r \to \neg q$	premise
3.	r	$\wedge e_R$ 1
4.	$\neg q$	$\to e$ 2,3
5.	$p \wedge q$	assumption
6.	q	$\wedge e_L$ 5
7.	$\perp$	$\neg e$ 6,4
8.	$r \to \neg p$	$\perp e$ 7
9.	$(p \wedge q) \to (r \to \neg p)$	$\to i$ 5-8

23.28

(ii)

1.	$\neg(p \wedge q)$	premise
2.	$p \vee \neg p$	LEM
3.	p	assumption
4.	q	assumption
5.	$p \wedge q$	$\wedge i$ 3,4
6	$\bot$	$\neg e$ 5, 1
7	$\neg q$	$\neg i$ 4–6
8	$\neg p \vee \neg q$	$\vee i_L$ 7
	$\neg p$	assumption
	$\neg p \vee \neg q$	$\vee i_R$ 3
9	$\neg p \vee \neg q$	$\vee e$ 2, 3–8

23.34

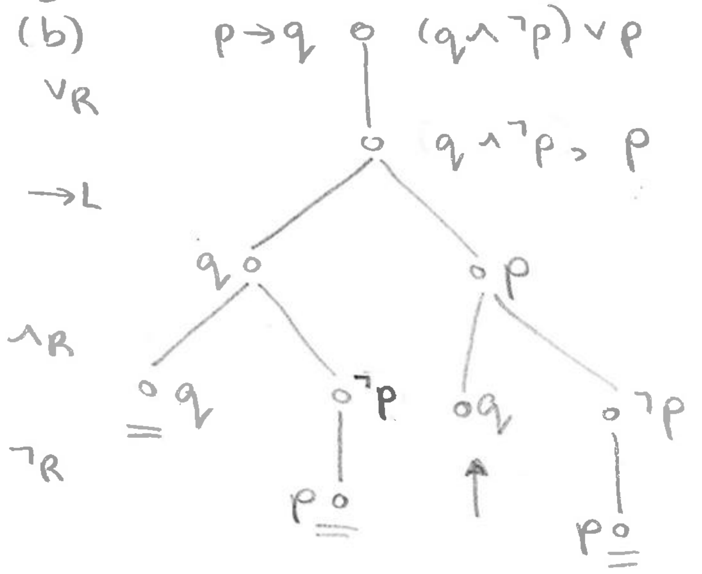
3 (a)

Dit tableau is gesloten. We vonden dus geen tegenvoorbeeld, zodat de gevolgtrekking geldig is

niet gevraagd.

23.39

(b)



Dit tableau bevat een open tak, aangegeven met ↑.
De bijbehorende waardering die als tegenvoorbeeld dient is $V(p) = V(q) = \text{false}$.
De gevolgtrekking is dus niet geldig.

(Als we, na $\vee_R$, eerst $\wedge_R$ toepassen, en daarna pas $\to_L$, wordt het tableau kleiner)

23.45

23.47

4 (a)

Na 0 iteraties van de while-lus is alleen de tautologie $\top$ gemarkeerd. De tautologie is altijd true, bij alle waarderingen, dus zeker bij alle waarderingen waarin φ naar true evalueert.

23.52

(b)

Voor de $(k+1)^e$ iteratie was er kennelijk nog een conjunct $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{k_i} \rightarrow P'$ van φ, waarbij elke P_j gemarkeerd was, maar P' nog niet. In deze iteratie wordt ook P' gemarkeerd.

23.54

00.19

Beschouw een willekeurige waardering van de atomen in φ waarbij φ naar true evalueert. Dat φ naar true evalueert, betekent dat ook al zijn conjuncten naar true evalueren (want $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$). In het bijzonder evalueert het conjunct $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{k_i} \rightarrow P'$ van deze iteratie naar true.

Vóór de iteratie zijn $P_1, P_2, \ldots, P_{k_i}$ allemaal gemarkeerd. Volgens de inductiehypothese zijn ze allemaal true in de waardering die we nu bekijken. Derhalve evalueert ook $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{k_i}$ naar true. Maar dat betekent dat ook P' naar true moet evalueren, want anders zou het conjunct $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{k_i} \rightarrow P'$ naar false evalueren, en dat is niet zo.

P' is het enige symbool dat in deze iteratie gemarkeerd wordt, en we hebben dus vastgesteld dat ook P' naar true evalueert in de waardering die we bekijken.

Omdat dat een willekeurige waardering was waarbij φ naar true evalueert, is P' true in al zulke waarderingen.

Na afloop van de iteratie geldt dus nog steeds dat alle gemarkeerde symbolen true zijn in alle waarderingen waarbij φ naar true evalueert.

De bewering is dus ook waar na $k+1$ iteraties

00.32

Uitwerking tentamen Logica (I&E), donderdag 3 januari 2019

06.18

5(a)

Een formule φ is in conjunctieve normaalvorm, als φ een conjunctie van disjuncties van literals is:

$$\varphi = (\ldots \vee \ldots \vee \ldots) \wedge (\ldots \vee \ldots) \wedge (\ldots \vee \ldots \vee \ldots \vee \ldots)$$

Een literal is een atoom p, of diens negatie $\neg p$.

06.21

(b)

(i)

$\text{IMPL\_FREE}(\varphi) = \text{IMPL\_FREE}(p \rightarrow (q \wedge (p \vee r))) = \neg p \vee (q \wedge (p \vee r))$

$\text{NNF}(\text{IMPL\_FREE}(\varphi)) = \text{NNF}(\neg p \vee (q \wedge (p \vee r))) = \neg p \vee (q \wedge (p \vee r))$

(we hoeven hier dus niets te veranderen)

$\text{CNF}(\text{NNF}(\text{IMPL\_FREE}(\varphi))) = \text{CNF}(\neg p \vee (q \wedge (p \vee r))) =$
$\text{DISTR}(\neg p, q \wedge (p \vee r)) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee p \vee r)$

06.27

(ii)

$\text{IMPL\_FREE}(\varphi) = (\neg(p \wedge q) \vee \text{IMPL\_FREE}(\neg r \rightarrow \neg p)) \vee (\neg r \wedge q) =$
$(\neg(p \wedge q) \vee (\neg\neg r \vee \neg p)) \vee (\neg r \wedge q)$

$\text{NNF}(\text{IMPL\_FREE}(\varphi)) = \text{NNF}((\neg(p \wedge q) \vee (\neg\neg r \vee \neg p)) \vee (\neg r \wedge q)) =$
$((\neg p \vee \neg q) \vee (r \vee \neg p)) \vee (\neg r \wedge q)$

$\text{CNF}(\text{NNF}(\text{IMPL\_FREE}(\varphi))) = \text{CNF}(((\neg p \vee \neg q) \vee (r \vee \neg p)) \vee (\neg r \wedge q)) =$
$\text{DISTR}(\neg p \vee \neg q \vee r \vee \neg p, \neg r \wedge q) = (\neg p \vee \neg q \vee r \vee \neg p \vee \neg r) \wedge$
$(\neg p \vee \neg q \vee r \vee \neg p \vee q)$

06.36

Het resultaat bevat twee conjuncten met elk vijf disjuncten.
Het eerste conjunct bevat r en $\neg r$, en wordt dus altijd true
Het tweede conjunct bevat $\neg q$ en q, en wordt dus ook altijd true.
Derhalve is φ valid.

06.39

6(a) Een bijpassende formule in predikatenlogica:

$$\forall x \, (V(x) \rightarrow (M(x) \wedge (s(x) = s(p)))) \wedge \exists x \, (V(x) \wedge K(x,p))$$

06.43

Hierin hebben we drie predikaatsymbolen (naast =):

$V(x)$:	x is een verdachte
$M(x)$:	x is een man
$K(x,p)$:	x kent p

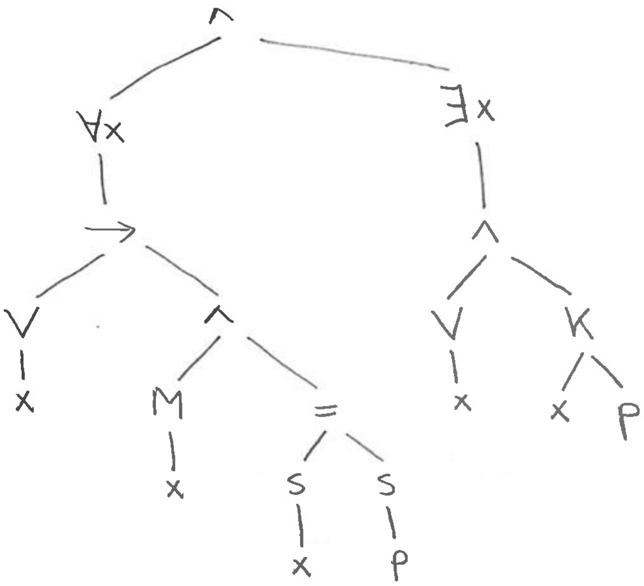
En twee functiesymbolen

$s(x)$:	de stad van x
p :	de (constante) professor.

Zie blz 7 voor alternatief antwoord 6(a).

06.46

(b) De parse tree:



06.49

(c) Een model dat de formule waarmaakt (en dat een beetje zinnig is):

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$

$V^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$

$M^{\mathcal{M}} = \{a, b, c\}$

$K^{\mathcal{M}} = \{(a,d), (b,c), (c,a), (c,d)\}$

$s^{\mathcal{M}}(a) = s^{\mathcal{M}}(b) = s^{\mathcal{M}}(d) = e$

$s^{\mathcal{M}}(c) = f$

$s^{\mathcal{M}}(e) = s^{\mathcal{M}}(f) = f$ (default-waarde)

$p^{\mathcal{M}} = d$

06.56 / 06.57

7 (a)

1.	$a = b$	premise
2.	$\forall x\,(P(b) \to Q(a,x))$	premise
3.	$P(b)$	assumption
4.	x_0	
5.	$P(b) \to Q(a, x_0)$	$\forall x$e 2
6.	$Q(a, x_0)$	$\to$e 5,3
7.	$Q(b, x_0)$	$=$e 1,6
8.	$\forall x\, Q(b,x)$	$\forall x$i 4–7
9.	$P(b) \to \forall x\, Q(b,x)$	$\to$i 3–8

$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} Q(x, x_0)$

07.09

Uitwerking tentamen Logica (J & E), donderdag 3 januari 2019

08.28

(b)

1.	$\exists y \forall x (P(x) \to Q(x,y))$	premise.
2.	x_0	
3.	$P(x_0)$	assumption
4.	$y_0 \quad \forall x (P(x) \to Q(x,y_0))$	assumption
5.	$P(x_0) \to Q(x_0,y_0)$	$\forall x$ e 4
6.	$Q(x_0,y_0)$	$\to$e 5,3
7	$\exists y\, Q(x_0,y)$	$\exists y$ i 6
8.	$\exists y\, Q(x_0,y)$	$\exists y$ e 1, 4-7
9.	$P(x_0) \to \exists y\, Q(x_0,y)$	$\to$i 3-8
10	$\forall x (P(x) \to \exists y\, Q(x,y))$	$\forall x$i 2-9

08.38

8(a) De eerstvolgende stap voor het linker deel hiervan is

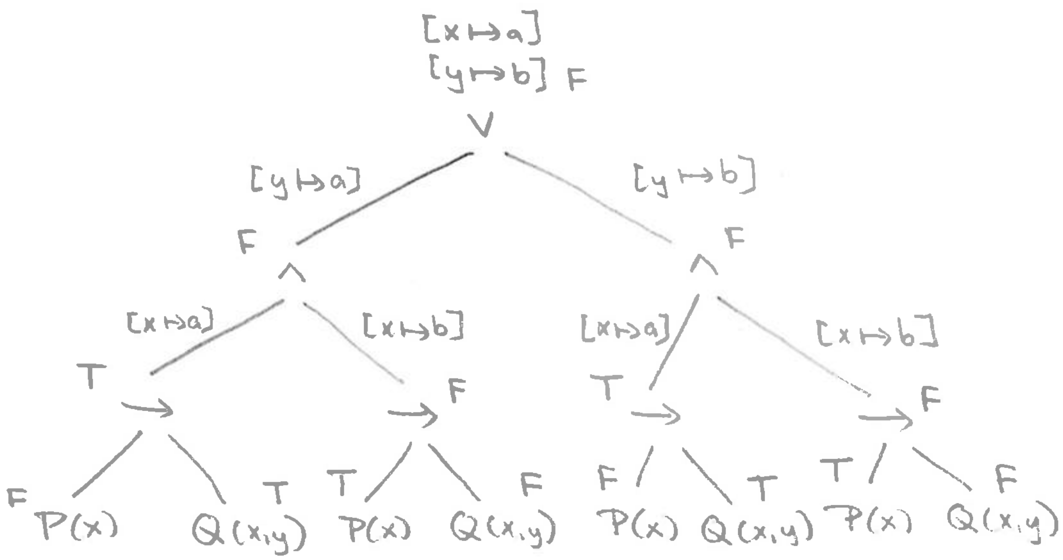
$$\mathcal{M} \models_{l[y\mapsto a]} \forall x (P(x) \to Q(x,y))$$

dan en slechts dan als

$$\mathcal{M} \models_{l[y\mapsto a][x\mapsto a]} (P(x) \to Q(x,y)) \text{ én } \mathcal{M} \models_{l[y\mapsto a][x\mapsto b]} (P(x) \to Q(x,y))$$

08.44

8) De 'parse tree' wordt



De wortel van de boom is false.

Er geldt dus niet $\mathcal{M} \models_l \varphi$

08.51

18.01

Alternatief antwoord opgave 6(a) (ook goed):

Een bijpassende formule in predikatenlogica:

$$\forall x\, (V(x) \rightarrow (M(x) \wedge S(x,p))) \wedge \exists x\, (V(x) \wedge K(x,p))$$

18.05

Hierin hebben we vier predikaatsymbolen:

- $V(x)$: x is een verdachte
- $M(x)$: x is een man
- $S(x,p)$: x en p komen uit dezelfde stad
- $K(x,p)$: x kent p

En één functiesymbool

- p : de (constante) professor.

18.08