3.2 SEMANTISCHE TABLEAUS

Sequent

We beginnen met een nieuw begrip. Een *sequent* is een rijtje van de volgende vorm, waarbij $\varphi_1, ..., \varphi_n$ en $\psi_1, ..., \psi_m$ twee rijtjes formules zijn, die worden gescheiden door een nieuw symbool $\circ$:

$$\varphi_1, ..., \varphi_n \circ \psi_1, ..., \psi_m$$

Een waardering V heet een *tegenvoorbeeld* van een sequent $\varphi_1, ..., \varphi_n \circ \psi_1, ..., \psi_m$ indien $V(\varphi_1) = ... = V(\varphi_n) = 1$ en $V(\psi_1) = ... = V(\psi_m) = 0$. Merk op dat een sequent waarin een formule φ aan beide kanten van $\circ$ voorkomt, geen tegenvoorbeeld kan hebben.

Semantisch tableau

Een *semantisch tableau* is een schema waarin op systematische wijze het mogelijk bestaan van tegenvoorbeelden van een gegeven sequent teruggebracht (*gereduceerd*) wordt tot dat van één of meer overzichtelijker sequenten. Uiteindelijk voert dit proces ons tot de eenvoudigste sequenten, waarvoor onze vraag meteen valt te beslissen.
Bepalen of een gevolgtrekking $\varphi_1, ..., \varphi_n \,/\, \psi$ een tegenvoorbeeld heeft, doen we dan door een semantisch tableau te maken voor de sequent $\varphi_1, ..., \varphi_n \circ \psi$. Enkele eenvoudige gevallen maken de methode duidelijk:

Voorbeeld 3.4

De geldigheid van de gevolgtrekking $\neg q, p \rightarrow q \,/\, \neg p$ uit voorbeeld 3.3 zien we als volgt in. Stel dat een zekere waardering V de proposities $\neg q$ en $p \rightarrow q$ waar maakt, en $\neg p$ onwaar:

$$\neg q, p \rightarrow q \circ \neg p$$

Deze bewering valt te vereenvoudigen. Immers, $\neg q$ waar maken, is hetzelfde – volgens de waarheidstabel voor negatie – als q onwaar maken. Dus mogen we ook noteren:

$$p \rightarrow q \circ \neg p, q$$

Maar evenzo is $\neg p$ onwaar maken hetzelfde als p waar maken:

$$p \rightarrow q, p \circ q$$

Aldus is de complexiteit van de vraagstelling al met twee connectieven gereduceerd. We gaan over tot het resterende connectief. Thans doet zich een *keuze* voor. Blijkens de waarheidstabel voor implicatie zijn er twee verschillende manieren om $p \to q$ waar te maken, te weten: q waar maken of p onwaar maken. Deze schrijven we beide op:

$$q, p \circ q \qquad p \circ q, p$$

Maar nu kunnen we meteen constateren dat beide mogelijkheden falen, aangezien er telkens een formule zowel links als rechts voorkomt. Dus elke mogelijkheid om een tegenvoorbeeld te construeren heeft gefaald: de oorspronkelijke gevolgtrekking moet wel geldig zijn.

Wanneer we dezelfde gedachtengang zouden volgen bij de variant $\neg p, p \to q \;/\; \neg q$, dan arriveren we juist bij de sequent

$$p \to q, q \circ p$$

die aanleiding geeft tot twee atomaire gevallen

$$q, q \circ p \qquad q \circ p, p$$

die beide een tegenvoorbeeld opleveren, en wel hetzelfde: $V(p) = 0$, $V(q) = 1$. De gevolgtrekking $\neg p, p \to q \;/\; \neg q$ is dus ongeldig.

Nog andere reductieregels komen we tegen wanneer we eenzelfde analyse uitvoeren op geldige gevolgtrekkingen als $\neg(p \wedge q), p \vee r \;/\; \neg q \vee r$. Het waar maken van een disjunctie kan op twee manieren: het linkerlid waar maken of het rechterlid waar maken. Het onwaar maken van een disjunctie kan slechts op één manier: zowel linker- als rechterlid onwaar maken.

We beschrijven nu de methode preciezer. Hierin gebruiken we de volgende notatie voor een rijtje formules: Φ voor het rijtje $\varphi_1, ..., \varphi_n$ en Ψ voor het rijtje $\psi_1, ..., \psi_m$. Deze notatie voor een *rijtje* en het vergelijkbare gebruik van Griekse hoofdletters voor een *verzameling* formules zullen we soms door elkaar heen gebruiken in volgende hoofdstukken. Uit de context blijkt dan of er verzamelingen dan wel rijtjes bedoeld worden. Eenzelfde verhaal geldt natuurlijk voor notaties als '$\Sigma \cup \{\varphi\}$', '$\Sigma + \varphi$' en 'Σ, φ': alleen in het laatste geval staat Σ voor een rijtje.

Reductieregels

Een sequent wordt gereduceerd met behulp van *reductieregels*. Een reductieregel heeft een van de volgende twee vormen:

$$\begin{array}{c} \Phi \circ \Psi \\ | \\ \Phi' \circ \Psi' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \Phi \circ \Psi & \\ & | & \\ \Phi' \circ \Psi' & & \Phi'' \circ \Psi'' \end{array}$$

De linkervorm wordt als volgt gelezen:

$\Phi \circ \Psi$ heeft een tegenvoorbeeld desda $\Phi' \circ \Psi'$ heeft een tegenvoorbeeld.

Notatie

'Desda' staat voor 'dan en slechts dan als', de tekstuele vorm van de dubbele implicatie $\Leftrightarrow$ die u uit de wiskunde kent. Op de relatie tussen $\Leftrightarrow$ en het propositielogische symbool $\leftrightarrow$ komen we in hoofdstuk 5 terug.

De 'splitsende' rechtervorm betekent:

$\Phi \circ \Psi$ heeft een tegenvoorbeeld desda $\Phi' \circ \Psi'$ heeft een tegenvoorbeeld *of* $\Phi'' \circ \Psi''$ heeft een tegenvoorbeeld.

Bij elk connectief hoort een linker en een rechter reductieregel: in de linker reductieregel komt het connectief aan de linkerkant van het teken $\circ$ voor, in de rechter reductieregel aan de rechterkant. De regels voor het connectief $\neg$ zijn kennelijk als volgt:

$$\neg_L: \begin{array}{c} \Phi, \neg\alpha \circ \Psi \\ | \\ \Phi \circ \alpha, \Psi \end{array} \qquad\qquad \neg_R: \begin{array}{c} \Phi \circ \neg\alpha, \Psi \\ | \\ \Phi, \alpha \circ \Psi \end{array}$$

Het is eenvoudig in te zien dat dit correct is. Stel bijvoorbeeld dat V een waardering is zodat $V(\Phi) = 1$, $V(\neg\alpha) = 1$ en $V(\Psi) = 0$ (met $V(\Phi) = 1$ wordt bedoeld $V(\varphi) = 1$, voor elke φ die in Φ voorkomt). Dan is dit equivalent met: $V(\Phi) = 1$, $V(\alpha) = 0$ en $V(\Psi) = 0$. Op eenzelfde manier is de juistheid van $\neg_R$ in te zien. Een soortgelijke motivering als voor $\neg$ valt te geven bij de reductieregels voor de overige connectieven, die we nu tabelleren:

$\wedge_L$: $\Phi, \alpha \wedge \beta \circ \Psi$
$\Phi, \alpha, \beta \circ \Psi$

$\wedge_R$: $\Phi \circ \alpha \wedge \beta, \Psi$
$\Phi \circ \alpha, \Psi$ $\quad$ $\Phi \circ \beta, \Psi$

$\vee_L$: $\Phi, \alpha \vee \beta \circ \Psi$
$\Phi, \alpha \circ \Psi$ $\quad$ $\Phi, \beta \circ \Psi$

$\vee_R$: $\Phi \circ \alpha \vee \beta, \Psi$
$\Phi \circ \alpha, \beta, \Psi$

$\rightarrow_L$: $\Phi, \alpha \rightarrow \beta \circ \Psi$
$\Phi, \beta \circ \Psi$ $\quad$ $\Phi \circ \alpha, \Psi$

$\rightarrow_R$: $\Phi \circ \alpha \rightarrow \beta, \Psi$
$\Phi, \alpha \circ \beta, \Psi$

$\leftrightarrow_L$: $\Phi, \alpha \leftrightarrow \beta \circ \Psi$
$\Phi, \alpha, \beta \circ \Psi$ $\quad$ $\Phi \circ \alpha, \beta, \Psi$

$\leftrightarrow_R$: $\Phi \circ \alpha \leftrightarrow \beta, \Psi$
$\Phi, \alpha \circ \beta, \Psi$ $\quad$ $\Phi, \beta \circ \alpha, \Psi$

Met behulp van een reductieregel kan een gegeven sequent S gereduceerd worden tot één of twee andere sequenten. Deze kunnen op hun beurt weer verder gereduceerd worden, enzovoorts. Aldus ontstaat een boomvorm, met S als wortel en sequenten $S_1, ..., S_n$ als bladeren. Als zo'n boom niet verder gereduceerd kan worden, spreken we van een *semantisch tableau*. Merk op dat een tableau altijd eindig is: de vertakkingsgraad van de boom is ten hoogste 2, terwijl de taklengte wordt begrensd door het totaal aantal connectieven dat in de topsequent voorkomt.

Open en gesloten tableau

Elke tak in een tableau correspondeert met een mogelijke route om een tegenvoorbeeld te vinden. Zo'n route kan op twee manieren eindigen:

a Er treedt eenzelfde formule links en rechts op in de sequent: we zeggen dan dat de tak van de boom *sluit*.
b Er treedt geen formule zowel links als rechts op, terwijl ook geen regel meer toepasbaar is. Dan noemen we de tak *open*.

We onderscheiden dan ook twee soorten tableaus:

1 Alle takken sluiten. Het tableau heet dan *gesloten*.
2 Minstens één tak blijft open. Het tableau heet dan *open*.

Deze twee gevallen corresponderen met geldigheid respectievelijk ongeldigheid van de met de topsequent corresponderende gevolgtrekking. We geven eerst nog eens een voorbeeld van het eerste geval:

Voorbeeld 3.5

Om te bepalen of de gevolgtrekking $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s \ / \ r \vee s$ geldig is, maken we een semantisch tableau met behulp van de reductieregels:

$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s \circ r \vee s$
1: $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s \circ r, s$
2: $r, p \vee q, q \rightarrow s \underline{\underline{\circ}} r, s$ $\quad$ $p \vee q, q \rightarrow s \circ r, s, p$
3: $p, q \rightarrow s \underline{\underline{\circ}} r, s, p$ $\quad$ $q, q \rightarrow s \circ r, s, p$
4: $s, q \underline{\underline{\circ}} r, s, p$ $\quad$ $q \underline{\underline{\circ}} r, s, p, q$

We hebben dus vier keer een reductieregel toegepast.

1 $\vee_R$ op $r \vee s$; dit levert de sequent bij 2.
2 $\rightarrow_L$ op $p \rightarrow r$; dit levert twee sequenten.

In de linker sequent komt de formule r links en rechts van $\circ$ voor. Dit geven we aan door het symbool $\circ$ dubbel te onderstrepen. Verder reduceren heeft dan volgens a geen zin, want in elke sequent die hierbij ontstaat, zal r links en rechts van $\circ$ staan. Een tegenvoorbeeld maakt de formules links van $\circ$ waar en rechts van $\circ$ onwaar. Omdat r zowel links als rechts voorkomt, en niet tegelijk waar en onwaar kan zijn, is er dus geen tegenvoorbeeld te vinden. De andere sequent staat bij 3.

3 $\vee_L$ op $p \vee q$; ook deze regel levert weer twee sequenten en ook hier geldt dat de linker sequent nooit een tegenvoorbeeld op zal leveren. De andere sequent staat bij 4.

4 $\rightarrow_L$ op $q \rightarrow s$; en ook deze regel levert twee sequenten. Beide sequenten zijn eindsequenten en kunnen niet verder gereduceerd worden. Bovendien komt in beide sequenten een formule aan weerszijden van $\circ$ voor, waardoor ook deze sequenten geen tegenvoorbeeld leveren.

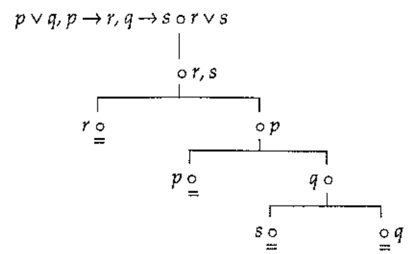
Hiermee is het tableau klaar. Er is geen tegenvoorbeeld gevonden en de gevolgtrekking is dus geldig.

Notatie

We kunnen de notatie bij de knopen vereenvoudigen en de omvang van de boom beperken. De omvang van de boom beperken we door een sequent niet verder te reduceren als daarin een formule zowel links als rechts voorkomt: iedere tak door deze knoop sluit dan immers. Dit hebben we in het voorgaande voorbeeld reeds toegepast.
Tevens kunnen we bij de knopen van een semantisch tableau de schrijfwijze vereenvoudigen door slechts aan te geven wat er *verandert* in een sequent als deze gereduceerd wordt, zoals in het nu volgende voorbeeld.

Voorbeeld 3.6

Beschouw nogmaals voorbeeld 3.5. In de eerste stap reduceren we $r \vee s$ tot r, s, en alleen dat geven we aan. Bij de volgende stap reduceren we $p \to r$ volgens de regel $\to_L$, en we geven aan wat er met p en r gebeurt, enzovoorts. Het tableau wordt dan:

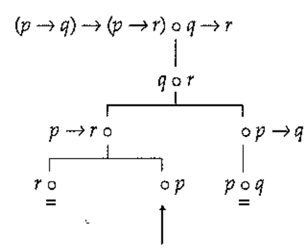


Een tak sluit als een formule zowel in een van zijn knopen links als in een van zijn (andere) knopen rechts van ∘ voorkomt.

Vervolgens geven we twee voorbeelden van een open tableau.

Voorbeeld 3.7

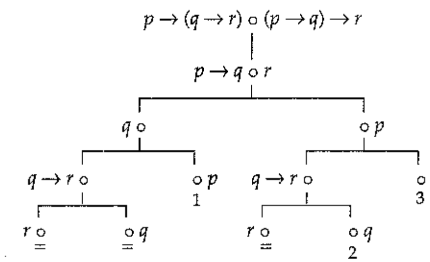
Om te testen of $(p \to q) \to (p \to r) \;/\; q \to r$ een geldige gevolgtrekking is, wordt het volgende tableau geconstrueerd:



Dit tableau bevat dus een open tak, aangegeven door de pijl. Een tegenvoorbeeld kan hiervan nu worden afgelezen door alle atomen die links van ∘ op deze tak voorkomen, waar te maken, en alle atomen die rechts van ∘ op de tak voorkomen, onwaar. Dus: $V(q) = 1$ en $V(r) = V(p) = 0$. Onder deze waardering geldt dan inderdaad ook $V((p \to q) \to (p \to r)) = 1$ en $V(q \to r) = 0$, zoals eenvoudig is na te gaan, ofwel $(p \to q) \to (p \to r) \not\models q \to r$.

Voorbeeld 3.8

De gevolgtrekking $p \to (q \to r) \;/\; (p \to q) \to r$ is niet geldig (dit betekent: '$\to$ is niet associatief'). Met het volgende tableau vinden we drie tegenvoorbeelden, met cijfers aangegeven:



De drie tegenvoorbeelden zijn dus:
$V_1(r) = V_1(p) = 0$, $V_1(q) = 1$
$V_2(r) = V_2(p) = V_2(q) = 0$
$V_3(r) = V_3(p) = 0$, $V_3(q)$ willekeurig (V_3 'omvat' dus V_1 en V_2).
Merk op dat:
- sommige takken tegenvoorbeelden opleveren zonder waarheidswaarden voor elk atoom te specificeren;
- verschillende takken niet noodzakelijk verschillende tegenvoorbeelden hoeven te dragen.

3.3 CONSISTENTIE

Semantische tableaus zijn ook voor andere doeleinden bruikbaar dan geldigheidstests. Bijvoorbeeld, we kunnen ons de vraag stellen of een gegeven verzameling formules wel modellen heeft.

DEFINITIE 3.2

Semantisch consistent
Een formuleverzameling Σ is (*semantisch*) *consistent* als Σ een model heeft. We zeggen ook dat Σ *vervulbaar* is.

Inconsistentie

Een formuleverzameling die niet consistent is, heet *inconsistent*. Inconsistentie van een verzameling Γ is vaak ongewenst, omdat afwezigheid van modellen betekent dat uit die verzameling iedere formule geldig volgt, en daarmee ook de negatie ervan. De implicatie 'als V een model van Γ is, dan is het een model van φ' (ofwel $\Gamma \models \varphi$) is immers waar wegens het onwaar zijn van de aanname.

Consistentie testen met een tableau

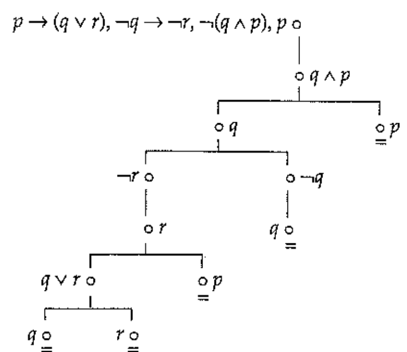
Consistentie van $\Sigma = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ valt nu als volgt met tableaus te testen. Beschouw de volgende sequent met rechts een lege rij:

$\varphi_1, ..., \varphi_n \circ$

Deze sequent heeft een tegenvoorbeeld als er een waardering V is die alle formules links van $\circ$ waar maakt en alle formules rechts van $\circ$ onwaar. Maar dat is gewoon een waardering die $\varphi_1, ..., \varphi_n$ waar maakt. Dus $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ is consistent als het tableau voor $\varphi_1, ..., \varphi_n \circ$ open is.

Voorbeeld 3.9

Is $\{p \to (q \vee r), \neg q \to \neg r, \neg(q \wedge p), p\}$ consistent?
Beschouw het volgende tableau:



Dit tableau sluit, dus de verzameling $\{p \to (q \vee r), \neg q \to \neg r, \neg(q \wedge p), p\}$ is inconsistent.

Tautologie testen met een tableau

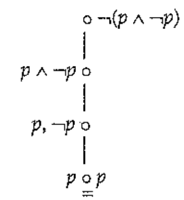
Met behulp van een tableau kunnen we ten slotte ook testen of een gegeven formule een *tautologie* is. Om te controleren of een formule φ onder elke waardering waar is, bekijken we nu een sequent met aan de linkerkant het lege rijtje:

$\circ\ \varphi$

Als deze sequent geen tegenvoorbeeld heeft, dan is φ waar in elk model van de lege verzameling. Aangezien elke waardering model is van de lege verzameling, is elke waardering model van φ. Dus φ is een tautologie als een tableau van $\circ\ \varphi$ sluit.

Voorbeeld 3.10

Het volgende tableau sluit, er is dus geen waardering V waarvoor $V(\neg(p \wedge \neg p)) = 0$, en daarmee is $\neg(p \wedge \neg p)$ een tautologie.



3.4 ADEQUAATHEID

Semantische tableaus werden geïntroduceerd als een methode om de geldigheid van een gevolgtrekking te bepalen. Een direct verband tussen deze twee noties wordt gegeven in de volgende stelling, die een verband legt tussen onze eerdere abstracte semantische notie van geldigheid en een meer concrete combinatorische:

STELLING 3.1

Adequaatheidsstelling
$\varphi_1, ..., \varphi_n \vDash \psi \Leftrightarrow$ er bestaat een gesloten tableau voor $\varphi_1, ..., \varphi_n \circ \psi$.

Deze stelling zegt dat de semantische tableaus een veilige methode vormen om te bepalen of een formule ψ een logisch gevolg is van $\varphi_1, ..., \varphi_n$. Een gegeven sequent kan meerdere tableaus hebben, afhankelijk van de volgorde waarin de reductieregels toegepast worden. De adequaatheidsstelling zegt onder meer dat alle mogelijke tableaus voor een sequent sluiten als ook maar één van hen sluit. Een bewijs hiervan wordt gegeven in hoofdstuk 5.

3.5 OPGAVEN

3.1 Stel $\varphi, \psi \vDash \alpha$, $\beta \vDash \gamma$ en $\psi, \alpha, \gamma \vDash \chi$. Indien nu bovendien bekend wordt dat χ onwaar is, maar ψ en β waar, wat weet u dan over φ?

3.2 Toon aan: $\varphi_1, \varphi_2 \vDash \psi \Leftrightarrow \varphi_1 \vDash \varphi_2 \to \psi \Leftrightarrow \vDash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi$.

3.3 Test met een semantisch tableau of de volgende equivalenties tautologieën zijn (als dat niet zo is, geef de tegenvoorbeelden):
i $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
ii $(p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \to q) \to (p \to r))$

3.4 a Bewijs met een tableau de zogenaamde 'Wet van Hauber', die onder bepaalde voorwaarden omkeren van implicatie toestaat:
$p_1 \to q_1, p_2 \to q_2, p_1 \vee p_2, \neg(q_1 \wedge q_2) \models (q_1 \to p_1) \wedge (q_2 \to p_2)$

b Laat zien dat de volgende gevolgtrekkingen niet geldig zijn:
i $p \vee (q \wedge r) \,/\, (p \vee q) \wedge r$
ii $(p \wedge q) \vee r \,/\, p \wedge (q \vee r)$

3.5 Geef een voorbeeld van een geldige sequent met twee bijbehorende gesloten tableaus die in aantallen knopen verschillen. (Kunt u een meest efficiënte zoekstrategie bedenken om steeds aan het kleinste gesloten tableau te komen?)

* 3.6 Bewijs dat indien er gesloten tableaus bestaan voor de sequenten $\varphi \circ \psi$ en $\psi \circ \Sigma$, dan ook voor $\varphi \circ \Sigma$. (Dit is rechtstreeks niet zo eenvoudig te bewijzen!)

* 3.7 Beredeneer of er ook geldige gevolgtrekkingen kunnen zijn die geldig blijven als u de erin voorkomende connectieven door willekeurige andere vervangt.