Uitwerking tentamen Logica (J&E), vrijdag 5 januari 2018

22.14

1b De waarheidstabel ziet er als volgt uit:

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$r \to p$	$r \vee p$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	F

De pijlen staan bij de rijen waar beide premises T zijn (zowel $p \to (q \to r)$ als $r \to p$). Daar zitten twee rijen bij waar de conclusie false is. De semantic entailment geldt dus niet.

22.21

22.29

a) Dat betekent dat alle waarderingen van de atomen in $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ en ψ die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ allemaal true maken, ook ψ true maken.

22.31

2 (a)

1. $p \to q$ premise
2. $p \vee \neg p$ premise
3. p assumption | $\neg p$ assumption
4. q $\to e$ 1, 3 | $\neg p \vee q$ $\vee i_R$ 3
5. $\neg p \vee q$ $\vee i_L$ 4
6. $\neg p \vee q$ $\vee e$ 2, 3–5, 3–4

22.34

(b)

1. $p \to q$ premise
2. $\neg p \vee \neg q$ premise
3. p assumption
4. q $\to e$ 1, 3
5. $\neg p$ assumption | $\neg q$ assumption
6. $\bot$ $\neg e$ 3, 5 | $\bot$ $\neg e$ 4, 5
7. $\bot$ $\vee e$ 2, 5-6, 5-6
8. $\neg p$ $\neg i$ 3-7.

Kan eenvoudiger met MT.

22.37

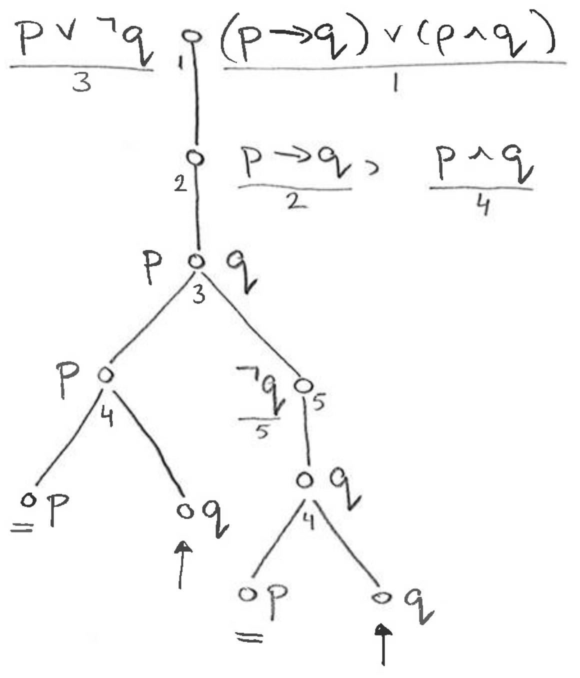
22.38

(c)

1.	$\neg p \to p$	premise
2.	$p \to (q \vee \neg r)$	premise
3.	$\neg p$	assumption
4.	p	$\to e$ 1,3
5.	$\bot$	$\neg e$ 4,3
6.	p	PBC
7.	$q \vee \neg r$	$\to e$ 2,6
8.	r	assumption
9.	q	assumption
10.	$q \wedge p$	$\wedge i$ 9,6
9.	$\neg r$	assumption
10.	$\bot$	$\neg e$ 8,9
11.	$q \wedge p$	$\bot e$ 10
12	$q \wedge p$	$\vee e$ 7, 9-11
13	$r \to (q \wedge p)$	$\to i$ 8-12

22.46

3 (a)



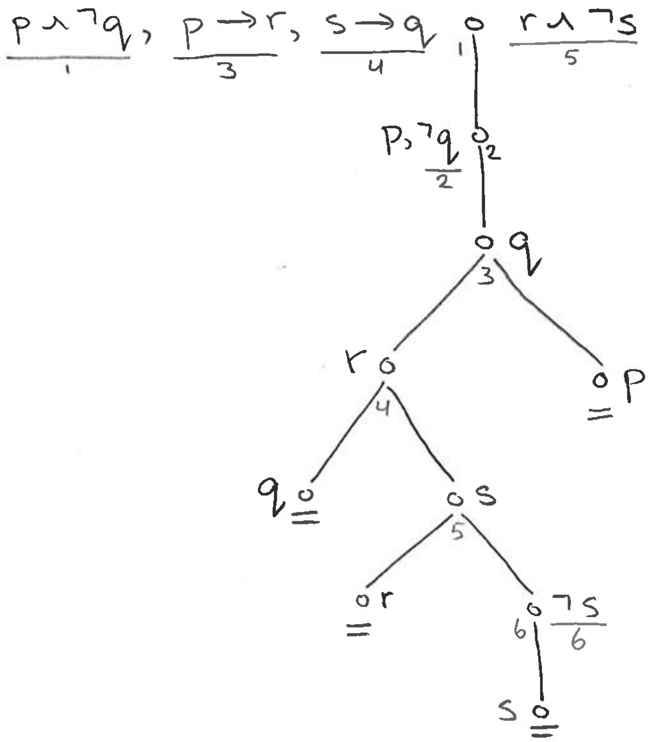
Het tableau is open.
De twee pijlen geven allebei dezelfde waardering aan die als tegenvoorbeeld dient:

$V(p) = \text{true}$
$V(q) = \text{false}.$

De gevolgtrekking is dus niet geldig

22.52.

(b)



Het tableau is gesloten.
De gevolgtrekking is dus geldig.

22.57 Neem aan dat $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$ geldt

4) We proberen de formule

$$\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow (\ldots (\varphi_n \rightarrow \psi) \ldots)))$$

false te maken.

Dat lukt alleen als φ_1 (de linkerkant van de implicatie) true is en $\varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow (\ldots (\varphi_n \rightarrow \psi) \ldots))$ (de rechterkant van de implicatie) false is.

Dat laatste lukt alleen als φ_2 true is en $\varphi_3 \rightarrow (\ldots (\varphi_n \rightarrow \psi) \ldots)$ false is.

Dat laatste lukt alleen als ...

enzovoort

als φ_n true is en ψ false is.

Ofwel, om $\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow (\ldots (\varphi_n \rightarrow \psi) \ldots)))$ false te maken, moeten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ allemaal true zijn en ψ false.

Dat kan echter niet, omdat $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$ geldt.

De formule $\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow (\ldots (\varphi_n \rightarrow \psi) \ldots)))$ is dus altijd true. In andere woorden

$$\models \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow (\ldots (\varphi_n \rightarrow \psi) \ldots)))$$

$\square$

23.06

5(a)

IMPL_FREE(φ) = φ, want φ kent geen $\rightarrow$

NNF(IMPL_FREE(φ)) = NNF($((p \wedge q) \vee \neg(q \wedge r))$)

$= (p \wedge q) \vee (\neg q \vee \neg r)$ De Morgan's law.

CNF(NNF(IMPL_FREE(φ))) =

CNF($((p \wedge q) \vee (\neg q \vee \neg r))$)

$= (p \vee (\neg q \vee \neg r)) \wedge (q \vee (\neg q \vee \neg r))$ distributiviteit.

$= (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg q \vee \neg r)$

23.11.

(b)

IMPL_FREE($(\neg p \rightarrow \neg(r \rightarrow p))$)

$= \neg\neg p \vee$ IMPL_FREE($(\neg(r \rightarrow p))$)

$= \neg\neg p \vee \neg(\neg r \vee p)$

NNF(IMPL_FREE(φ)) = NNF($(\neg\neg p \vee \neg(\neg r \vee p))$)

$= p \vee ($NNF$(\neg\neg r) \wedge \neg p)$ $\neg\neg$ eliminatie en De Morgan's law.

$= p \vee (r \wedge \neg p)$ $\neg\neg$ eliminatie.

CNF(NNF(IMPL_FREE(φ))) =

CNF($(p \vee (r \wedge \neg p))$)

$= (p \vee r) \wedge (p \vee \neg p)$ distributiviteit.

De linker conjunct $(p \vee r)$ in dit resultaat bevat voor geen enkel atoom p_i zowel p_i als $\neg p_i$. Derhalve is φ niet valid.

23.19.

6 a)

1.	$\forall x\,(P(y) \rightarrow Q(x,y))$	premise
2.	$P(y)$	assumption
3.	x_0	
4.	$P(y) \rightarrow Q(x_0,y)$	$\forall x$ e 1
5.	$Q(x_0,y)$	$\rightarrow$ e 4,2
6.	$\forall x\, Q(x,y)$	$\forall x$ i 3-5
7.	$P(y) \rightarrow \forall x\, Q(x,y)$	$\rightarrow$ i 2-6.

23.25

(b)

1.		$\exists x\, P(x)$	premise
2.		$\exists y\, \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x,y))$	premise.
3.	x_0.	$P(x_0)$	assumption.
4.	y_0.	$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x,y_0))$	assumption
5.		$P(x_0) \rightarrow Q(x_0,y_0)$	$\forall x$ e 4
6.		$Q(x_0,y_0)$	$\rightarrow$e 5,3
7.		$\exists y\, Q(x_0,y)$	$\exists y$ i 6
8.		$\exists y\, Q(x_0,y)$	$\exists y$ e 2, 4–7
9.		$\exists x \exists y\, Q(x,y)$	$\exists x$ i 8
10		$\exists x \exists y\, Q(x,y)$	$\exists x$ e 1, 3–9.

23.33.

7. (a)

Dit model maakt φ niet waar.

Immers, als $x = a$, dan is $x \notin P^{\mathcal{M}}$, zodat $P(x)$ is false.

Bovendien geldt dan dat (x,y) voor elke y in $Q^{\mathcal{M}}$ zit, want (a,a) en (a,b) zitten allebei in $Q^{\mathcal{M}}$

Er is dus geen y waarvoor $\neg Q(x,y)$ true is.

Er is dus ook geen y waarvoor $P(x)$ true is of $\neg Q(x,y)$ true is.

23.39

(b)

Dit model maakt φ wel waar.

Immers,

- als $x = a$, kunnen we $y = c$ nemen, want $(a,c) \notin Q^{\mathcal{M}}$
  $\Rightarrow$ $\neg Q(x,y)$ wordt true
- als $x = b$, kunnen we elke y nemen, want $b \in P^{\mathcal{M}}$
  $\Rightarrow$ $P(x)$ wordt true
- als $x = c$, kunnen we $y = a$ of $y = b$ nemen, want $(a,c) \notin Q^{\mathcal{M}}$ en $(b,c) \notin Q^{\mathcal{M}}$ $\Rightarrow$ $\neg Q(x,y)$ wordt true.

23.44

23.46

8. Er geldt:

$$M \models_{\ell[x \mapsto a]} \exists y\, (P(x) \vee \neg Q(x,y))$$

dan en slechts dan als

$$M \models_{\ell[x \mapsto a][y \mapsto a]} (P(y) \vee \neg Q(x,y)) \text{ of} \qquad (1)$$

$$M \models_{\ell[x \mapsto a][y \mapsto b]} (P(y) \vee \neg Q(x,y)) \qquad (2)$$

(1) geldt dan en slechts dan als

$M \models_{\ell[x\mapsto a][y\mapsto a]} P(y)$ of (3)

$M \models_{\ell[x\mapsto a][y\mapsto a]} \neg Q(x,y)$ (4)

(3) geldt dan en slechts dan als $a \in P^{\mathcal{M}}$.
Dat is helaas niet het geval.
(4) geldt dan en slechts dan als

$M \models_{\ell[x\mapsto a][y\mapsto a]} Q(x,y)$ niet geldt.

Dat is inderdaad! het geval, want $(a,a) \notin Q^{\mathcal{M}}$

23.55
10.53 Dat betekent dat (1) geldt, en dat betekent dat

$M \models_{\ell[x\mapsto a]} \exists y\,(P(x) \vee \neg Q(x,y))$

geldt.

10.54