

Topologisch sorteren

Op blz. 89-91 van het boek wordt een algoritme met dynamisch programmeren beschreven voor het vinden van een kortste pad in een gerichte, acyclische graaf. In dit algoritme is het van belang dat je weet in welke volgorde je de afstanden van knopen naar de eindknoop B moet berekenen. Je kunt een geschikte volgorde vinden met behulp van *topologisch sorteren*.

Bij topologisch sorteren bepalen we een topologische ordening van de knopen in een gerichte, acyclische graaf. Dit houdt in dat je de knopen in een lijn van links naar rechts legt, zó dat de takken in de graaf allemaal van links naar rechts lopen. Dit kun je als volgt voor elkaar krijgen.

Tel voor iedere knoop in de graaf hoeveel inkomende takken die heeft (tijdens de les telden we de uitgaande takken, maar dat maakt voor het principe niet uit!). Kies een knoop met 0 inkomende takken, verwijder die knoop met zijn uitgaande takken, en pas de cijfers (de aantallen inkomende takken) van de andere knopen daarop aan. Kies dan een volgende knoop met 0 inkomende takken, verwijder die knoop met zijn uitgaande takken, en pas de cijfers van de andere knopen daarop aan. Enzovoort, enzovoort, totdat alle knopen gekozen zijn. Als we de knopen van links naar rechts leggen in de volgorde waarin we ze gekozen hebben, hebben we een topologische ordening.

Het kan voorkomen dat er op een bepaald moment meerdere knopen met 0 inkomende takken zijn. In dat geval mogen we willekeurig een van die knopen kiezen. Dat levert weliswaar verschillende volgordes op, maar iedere resulterende volgorde is een geldige topologische ordening.

Onderstaande tabel geeft een uitkomst voor de graaf in Figuur 4.6 op blz. 90 van het boek:

stap	aantal ink. takken							actie
	A	B	C	D	E	F	G	
1	0	3	2	1	3	1	2	Kies A, verwijder A en zijn uitg. takken
2	-	3	1	0	3	1	1	Kies D, verwijder D en zijn uitg. takken
3	-	3	0	-	2	1	0	Kies C, verwijder C en zijn uitg. takken
4	-	3	-	-	1	0	0	Kies G, verwijder G en zijn uitg. takken
5	-	2	-	-	0	0	-	Kies E, verwijder E en zijn uitg. tak
6	-	1	-	-	-	0	-	Kies F, verwijder F en zijn uitg. tak
7	-	0	-	-	-	-	-	Kies B, verwijder B

De resulterende topologische ordening is dus A D C G E F B. We kunnen (de lengte van) het kortste pad van A naar B vinden door voor iedere knoop X (in de omgekeerde volgorde) de afstand $L(X)$ naar B te berekenen. Dus eerst $L(B) = 0$, dan $L(F)$, $L(E)$, $L(G)$, $L(C)$, $L(D)$, $L(A)$.

Bij het topologisch sorteren konden we bij drie van de stappen kiezen tussen twee knopen met 0 uitgaande takken. Zoals gezegd zouden andere keuzes daar andere topologische ordeningen opleveren. Bepaal alle mogelijke topologische ordeningen bij deze graaf, door alle mogelijke keuzes uit te proberen.

N.B.: als de graaf ongericht is, of als er kringen in de graaf voorkomen, kun je de knopen niet topologisch sorteren. Het is dus echt van belang dat we een gerichte, acyclische graaf hebben.