Bewijzen met behulp van inductie

Als je wilt beweren dat een bewering waar is voor alle $N \geq n_0$ (b.v. $N \geq 1$), dan kun je dat vaak met behulp van inductie doen. Dat gaat in twee stappen:

Basis Je bewijst dat de bewering waar is voor $N = n_0$.

Inductiestap Je neemt aan dat de bewering waar is voor alle waardes tot en met $N-1$ voor zekere waarde N met $N-1 \geq n_0$ (de inductiehypothese). Op basis van deze hypothese bewijs je dat de bewering waar is voor de waarde N zelf.

Hiermee toon je aan dat de bewering waar is voor $N = n_0$, maar dan ook voor $N = n_0 + 1$, maar dan ook voor $N = n_0 + 2$, maar dan ook voor $N = n_0 + 3$, enzovoort. Voor alle $N \geq n_0$ dus.

Neem als voorbeeld de bewering: voor alle $N \geq 1$ is

$$\sum_{i=1}^{N} i = \frac{1}{2} \times N \times (N+1).$$

Basis Voor $N = 1$ is dit gemakkelijk, want dan is

$$\sum_{i=1}^{N} i = \sum_{i=1}^{1} i = 1$$

en

$$\frac{1}{2} \times N \times (N+1) = \frac{1}{2} \times 1 \times (1+1) = 1.$$

Inductiestap Stel dat de bewering waar is voor alle waardes tot en met $N-1$, voor zekere waarde N met $N-1 \geq 1$ (inductiehypothese). Dan is in het bijzonder

$$\sum_{i=1}^{N-1} i = \frac{1}{2} \times (N-1) \times ((N-1)+1). \tag{2}$$

We willen nu de bewering bewijzen voor de waarde N.

$$\sum_{i=1}^{N} i = (\sum_{i=1}^{N-1} i) + N.$$

Hier vullen we (2) in in:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} i &= (\sum_{i=1}^{N-1} i) + N = \frac{1}{2} \times (N-1) \times ((N-1)+1) + N \\ &= \frac{1}{2} \times (N-1) \times (N) + \frac{1}{2} \times 2 \times N = \frac{1}{2} \times N \times (N-1+2) = \frac{1}{2} \times N \times (N+1).\end{aligned}$$

De bewering is dus ook waar voor de waarde N.