TENTAMEN FUNDAMENTELE INFORMATICA 3
Maandag 29 juni 2020, 14.15 - 17.15 uur

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven, waarbij steeds tussen [en] staat hoeveel punten er ongeveer mee te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen. Wanneer er in een opgave gevraagd wordt om uitleg, toelichting of motivatie van je antwoord, is het belangrijk om die ook te geven.

---

1. (20 punten) Deze opgave gaat over 2-tapes Turingmachines

   (a) Beschrijf in woorden hoe de initiële configuratie van een 2-tapes Turingmachine met starttoestand q_0 eruit ziet voor een invoer x.

   (b) Een 1-tape Turingmachine voor de functie $f : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$, gedefinieerd door $f(x) = x^r$ (x-reverse, de omkering van x), vereist al gauw een aantal stappen dat kwadratisch is in de lengte van x. Construeer een **2-tapes Turingmachine** T die deze functie in een lineair aantal stappen berekent.

   Als je voor T gebruik wilt maken van componenten, moeten dat wel 2-tapes componenten zijn, en zul je ze ook moeten uitwerken (tekenen dus).

   N.B.: algemene uitleg over de werking van T kun je geven bij onderdeel (c).

   (c) Leg duidelijk uit hoe de Turingmachine T uit onderdeel (b) werkt. Desgewenst mag je (een deel van) je uitleg ook direct bij het plaatje schrijven dat je tekent bij (b). In dat geval hoef je datzelfde stuk uitleg hier niet te herhalen.

---

2. (27 punten) Deze opgave gaat over een Turingmachine voor een taal.

   Laat de taal L_1 gedefinieerd zijn door $L_1 = \{a^i b^j a^{2i} \mid i, j \geq 0 \text{ en } i \leq j < 2i\}$.

   (a) Geef de eerste vier elementen van L_1 in de canonieke volgorde.

   (b) Construeer een gewone (deterministische, 1-tape) Turingmachine T_1, zó dat $L(T_1) = L_1$. De enige componenten die je voor T_1 mag gebruiken, zijn *NB* en *PB* uit paragraaf 7.4 van het boek.

   Wellicht ten overvloede:

   - *NB* verplaatst de leeskop naar de eerste Δ rechts van de huidige positie,
   - *PB* verplaatst de leeskop (zo mogelijk) naar de eerste Δ links van de huidige positie

   Hint: controleer eerst of de letters in de juiste volgorde staan.

   N.B.: algemene uitleg over de werking van T_1 kun je geven bij onderdeel (c).

   (c) Leg duidelijk uit hoe de Turingmachine T_1 uit onderdeel (b) werkt.

   Desgewenst mag je (een deel van) je uitleg ook direct bij het plaatje schrijven dat je tekent bij (b). In dat geval hoef je datzelfde stuk uitleg hier niet te herhalen.

---

3. (21 punten) Deze opgave gaat over een unrestricted grammar.

   (a) Laten de talen L_1, L_2 en L_3 als volgt gedefinieerd zijn:
   $L_1 = \{a^i b^j a^{2i} \mid i, j \geq 0 \text{ en } i \leq j < 2i\}$
   $L_2 = \{a^i b^j c^{2i} \mid i, j \geq 0 \text{ en } i \leq j < 2i\}$
   $L_3 = \{a^i b^j c^{2i} \mid i, j \geq 0 \text{ en } i \leq j \leq 2i\}$
   Kies een van deze drie talen L_i en geef een unrestricted grammar G, zó dat $L(G) = L_i$. Maak duidelijk welke taal L_i je gekozen hebt.

   Leg uit wat de functie is van de diverse variabelen en producties in G.

   Voor L_1 kun je de meeste punten verdienen, voor L_3 de minste. Met L_2 en L_3 kun je dus niet aan 21 punten komen voor deze opgave. Het verschil in te behalen punten tussen L_1 en L_3 zal echter hoogstens 4 punten zijn.

   (b) Geef een afleiding in je grammatica G uit onderdeel (a), voor het woord *aabbbaaaa* (als je gekozen hebt voor L_1) of voor het woord *aabbbcccc* (als je gekozen hebt voor L_2 of L_3).

   Wanneer je in de afleiding een aantal 'gelijksoortige' producties achter elkaar toepast, mag je die stappen samenvatten met behulp van $\Rightarrow^*$.

---

4. (11 punten) Deze opgave gaat over recursieve opsombaarheid.

   (a) Stel dat $L_1 \subseteq \{a, b\}^*$ een recursief opsombare taal over $\{a, b\}$ is, en dat $L_2 = L_1 \cup \{x_1\}$ voor zekere string $x_1 \in \{a, b\}^*$.

   Toon aan, door de werking van een Turingmachine voor L_2 te beschrijven, dat ook L_2 recursief opsombaar is. Vergeet niet om je 'bewijs' netjes af te ronden met een conclusie.

   Mocht je in je antwoord een plaatje willen opnemen (dat is overigens niet per se nodig), dan kun je dat gewoon doen.

   (b) Laat $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ voor zekere $n \geq 0$ een eindige verzameling strings over $\{a, b\}$ zijn. Laat $L_3 = \{a, b\}^* \setminus A$, ofwel: L_3 is het complement van A.

   Toon aan, door de werking van een Turingmachine voor L_3 te beschrijven, dat L_3 recursief opsombaar is. Vergeet niet om je 'bewijs' netjes af te ronden met een conclusie.

   Mocht je in je antwoord een plaatje willen opnemen (dat is overigens niet per se nodig), dan kun je dat gewoon doen.

---

5. (21 punten) Deze opgave gaat over beslisbaarheid.

   Beschouw de volgende twee beslissingsproblemen:

   > *Accepts-ab*: Gegeven een Turingmachine T_1 met invoeralfabet $\{a, b\}$, accepteert T_1 de string ab ?
   >
   > *Accepts-Prefix*: Gegeven een Turingmachine T_2 en een string x_2 over zijn invoeralfabet, accepteert T_2 minstens één prefix van x_2 ?

   (a) De stelling van Rice luidt als volgt:

   > Als R een niet-triviale taaleigenschap (language property) van Turingmachines is, dan is het beslissingsprobleem
   > P_R: Gegeven een Turingmachine T, heeft T eigenschap R ?
   > niet beslisbaar.

   Voor een van de twee beslissingsproblemen *Accepts-ab* en *Accepts-Prefix* volgt de niet-beslisbaarheid rechtstreeks uit de stelling van Rice. Welk probleem is dit?

   Motiveer je antwoord door voor dit ene probleem aan te tonen dat het aan alle voorwaarden van de stelling van Rice voldoet. Gebruik (en teken) voor het aantonen van niet-trivialiteit concrete Turingmachines.

   (b) Voor een van de twee beslissingsproblemen *Accepts-ab* en *Accepts-Prefix* volgde de niet-beslisbaarheid dus rechtstreeks uit de stelling van Rice.

   Toon aan dat ook het andere beslissingsprobleem niet beslisbaar is, met behulp van een reductie tussen de twee problemen. Laat uiteraard ook zien dat aan alle eisen van een reductie is voldaan, en vergeet niet om de conclusie te trekken.

`einde tentamen`