HERTENTAMEN FUNDAMENTELE INFORMATICA 1 (I&E)
Maandag 22 februari 2016, 10.00 - 13.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven, waarbij steeds tussen [en] staat hoeveel punten er ongeveer mee te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen.

Als je het antwoord op een onderdeel niet weet, en je hebt dat antwoord nodig bij een later onderdeel, dan kun je het antwoord 'kopen' bij de docent.

Geef de gevraagde eindige automaten en stapelautomaten door middel van hun transitiediagram (het plaatje dus).

Als er bij een opgave gevraagd wordt om uitleg bij je antwoord, is het belangrijk dat je die ook geeft.

---

1. [9 pt]

   (a) Laat
   $$L_1 = \{a\} \qquad\qquad L_2 = \{\Lambda, bb\}$$
   Geef de eerste zes elementen in de canonieke volgorde van de taal
   $$(L_1^* L_2)^*$$

   (b) Vergeet nu de twee specifieke talen L_1 en L_2 van hierboven. Geldt er voor iedere twee talen L_1 en L_2 over het alfabet $\{a, b\}$ dat
   $$(L_1^* L_2)^* = (L_1 \cup L_2)^*$$
   Zo ja, toon dit formeel aan.
   Zo nee, geef een voorbeeld van talen L_1 en L_2 over $\{a, b\}$ waarvoor het niet geldt. Geef dan ook een string $x \in \{a, b\}^*$ die duidelijk maakt dat het niet voor die twee talen geldt.

---

2. [11 pt] Het pomplemma voor reguliere talen luidt als volgt:

   Stel L is een taal over het alfabet Σ.
   Als L geaccepteerd wordt door een eindige automaat $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$,
   en als n het aantal toestanden van M is,
   dan zijn er voor elke $x \in L$ met $|x| \geq n$ drie strings u, v en w
   zó dat $x = uvw$ en de volgende drie beweringen waar zijn:
   1. $|uv| \leq n$.
   2. $|v| > 0$ (dwz: $v \neq \Lambda$).
   3. Voor elke $i \geq 0$ zit ook de string uv^iw in L.

   Gebruik dit pomplemma om aan te tonen dat de taal
   $$L_0 = Pal = \{x \in \{a, b\}^* \mid x = x^r\}$$
   (de palindromen over het alfabet $\{a, b\}$) niet door een eindige automaat geaccepteerd kan worden.

   Ofwel: veronderstel dat L_0 wél door een eindige automaat geaccepteerd kan worden, kies dan een geschikt woord $x \in L_0$ en toon aan dat x niet opgepompt en/of weggepompt kan worden. Vergeet ook niet om de conclusie te trekken.

---

3. [19 pt] Bij onderdelen (a) en (b) hoef je geen 'afvoerputje' te tekenen voor woorden die nooit meer uit kunnen groeien tot een element van de gevraagde taal.

   (a) Geef een gewone (deterministische) eindige automaat M_1 voor de taal die beschreven wordt door de reguliere expressie $a^*(bb + cc^*)$.

   N.B.: let goed op de voorrangsregels van de operatoren waarmee een reguliere expressie wordt opgebouwd (+, concatenatie en Kleene $*$).

   (b) Geef nu een gewone (deterministische) eindige automaat M_2 voor de taal die beschreven wordt door de reguliere expressie $(a^*(bb + cc^*))^*$.

   (c) Leg uit in woorden op welke wijze een niet-deterministische eindige automaat (NFA) af kan wijken van een gewone (deterministische) eindige automaat.

   (d) Leg uit (met woorden en/of plaatjes, maar in ieder geval duidelijk en volledig) hoe je in het algemeen een NFA $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ voor een taal $L = L(M)$ kunt 'ombouwen' tot een NFA M' voor de taal L^*.

---

4. [17 pt] Bij onderdelen (b) en (d) is het nadrukkelijk niet de bedoeling dat je een stapelautomaat rechtstreeks met de top-down of de bottom-up methode construeert uit je antwoord voor (a), respectievelijk (c). De automaten moeten gebaseerd zijn op eenvoudige symmetrie-eigenschappen van de strings in de talen zelf.

   Laat $\mathit{Pal} = \{x \in \{a, b\}^* \mid x = x^r\}$ (de palindromen over het alfabet $\{a, b\}$) en laat $\mathit{NonPal} = \{x \in \{a, b\}^* \mid x \neq x^r\}$ (de niet-palindromen over het alfabet $\{a, b\}$).

   (a) Geef een context-vrije grammatica G_1, zó dat $L(G_1) = \mathit{Pal}$.

   (b) Geef een stapelautomaat M_1, zó dat $L(M_1) = \mathit{Pal}$.

   (c) Geef een context-vrije grammatica G_2, zó dat $L(G_2) = \mathit{NonPal}$.

   (d) Geef een stapelautomaat M_2, zó dat $L(M_2) = \mathit{NonPal}$.
   Leg ook uit hoe M_2 werkt.

---

5. [11 pt] Laat G een context-vrije grammatica zijn met startvariabele S en de volgende producties:

$$S \to aSb \mid aTb \qquad\qquad T \to bTa \mid bT \mid a$$

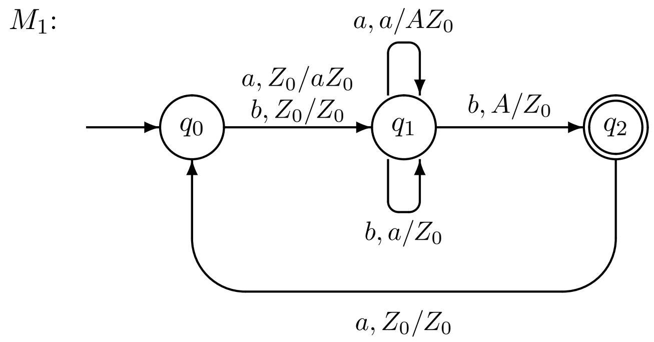
   (a) Geef een afleidingsboom in G voor de string $x = aabbaabb$.

   (b) Geef de niet-deterministische top-down stapelautomaat $NT(G)$ bij G.

   (c) Leg uit waarom we bij de stapelautomaat $NT(G)$ spreken van een *top-down* stapelautomaat.

---

6. [22 pt] Beschouw de volgende stapelautomaat M_1:

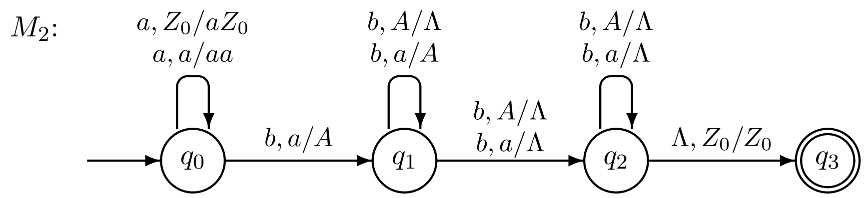


Hierbij gaan we ervanuit dat Z_0 het initiële stapelsymbool van M_1 is.

(a) Geef een succesvolle berekening voor een *zo kort mogelijke* string $x \in \{a,b\}^*$ die door M_1 geaccepteerd wordt, dat wil zeggen: een berekening van de initiële configuratie (q_0, x, Z_0) naar een accepterende configuratie.

(b) Beschrijf (met woorden en/of formules, maar in ieder geval duidelijk en volledig) de strings die geaccepteerd worden door M_1.
Motiveer je antwoord.

Beschouw nu de volgende stapelautomaat M_2:



Hierbij gaan we ervanuit dat Z_0 het initiële stapelsymbool van M_2 is.

(c) Geef de eerste vier elementen in de canonieke volgorde van $L(M_2)$.

(d) Beschrijf (met woorden en/of formules, maar in ieder geval duidelijk en volledig) de strings die geaccepteerd worden door M_2.
Motiveer je antwoord, bijvoorbeeld door uit te leggen hoe je verder kunt gaan in M_2 na het lezen van een aantal a's.

---

7. [11 pt] Geef een *unrestricted* grammatica G zó dat

$$L(G) = XX = \{xx \mid x \in \{a,b\}^*\}$$

Dat wil zeggen: G gerenereert alle woorden in $\{a,b\}^*$ die op te splitsen zijn in twee gelijke helften.

Leg uit wat de functie is van de diverse variabelen en producties in G.
