TENTAMEN FUNDAMENTELE INFORMATICA 1 (I&E)
Donderdag 7 januari 2016, 10.00 - 13.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 8 opgaven.

Als je het antwoord op een onderdeel niet weet, en je hebt dat antwoord nodig bij een later onderdeel, dan kun je het antwoord 'kopen' bij de docent.

Geef de gevraagde eindige automaten, stapelautomaten en Turing machine door middel van hun transitiediagram (het plaatje dus).

Als er bij een opgave gevraagd wordt om uitleg bij je antwoord, is het belangrijk dat je die ook geeft.

---

1. (a) Laat

$$L_1 = \{\Lambda, a\} \qquad\qquad L_2 = \{\Lambda, bb\}$$

   i. Geef de eerste vijf elementen in de canonieke volgorde van de taal $L_1^* L_2^*$.
   ii. Geef de eerste vijf elementen in de canonieke volgorde van de taal $(L_1 L_2)^*$.

   (b) Vergeet nu de twee specifieke talen L_1 en L_2 van hierboven. Geldt er voor iedere twee talen L_1 en L_2 over het alfabet $\{a, b\}$, dat

$$L_1^* L_2^* \subseteq (L_1 L_2)^*$$

   Zo ja, toon dit formeel aan.
   Zo nee, geef een voorbeeld van talen L_1 en L_2 over $\{a, b\}$ waarvoor het niet geldt. Geef dan ook een string $x \in \{a, b\}^*$ die duidelijk maakt dat het niet voor die twee talen geldt.

---

2. (a) Geef een eindige automaat M_1, zó dat

$$L(M_1) = \{x \in \{a, b\}^* \mid x \text{ bevat geen substring } bab\}$$

   M_1 mag bij geen enkele invoer crashen.

   (b) Geef een eindige automaat M_2, zó dat

$$\begin{aligned} L(M_2) = \{x \in \{a, b\}^* \mid\ & x \text{ mag alleen voorkomens van } bab \text{ bevatten} \\ & \text{als er (direct of later) na het laatste voorkomen van } bab \\ & \text{een voorkomen van } aa \text{ is in } x\} \end{aligned}$$

   Bijvoorbeeld:
   $aba \in L(M_2)$, want bevat geen voorkomen van *bab*,
   $aababbbba \notin L(M_2)$, want bevat een voorkomen van *bab* waar geen voorkomen van *aa* achteraan komt,
   $aabababbbaaba \in L(M_2)$, want bevat een voorkomen van *aa* na de voorkomens van *bab*.

---

3. Het pomplemma voor reguliere talen luidt als volgt:

   Stel L is een taal over het alfabet Σ.
   Als L geaccepteerd wordt door een eindige automaat $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$,
   en als n het aantal toestanden van M is,
   dan zijn er voor elke $x \in L$ met $|x| \geq n$ drie strings u, v en w
   zó dat $x = uvw$ en de volgende drie beweringen waar zijn:
   1. $|uv| \leq n$.
   2. $|v| > 0$ (dwz: $v \neq \Lambda$).
   3. Voor elke $i \geq 0$ zit ook de string uv^iw in L.

   Gebruik dit pomplemma om aan te tonen dat de taal

   $$L_0 = \{(ab)^i a^j \quad | \quad i > j \geq 1\}$$

   niet door een eindige automaat geaccepteerd kan worden.

   Ofwel: veronderstel dat L_0 wél door een eindige automaat geaccepteerd kan worden, kies dan een geschikt woord $x \in L_0$ en toon aan dat x niet opgepompt en/of weggepompt kan worden. Vergeet ook niet om de conclusie te trekken.

---

4. Beschouw de volgende reguliere expressie r_0:

   $$r_0 : \quad ((a + ba)^* a + bba)^*$$

   (a) Geef de eerste zes elementen in de canonieke volgorde van de taal die wordt beschreven door r_0.

   N.B.: let goed op de voorrangsregels van de operatoren waarmee een reguliere expressie wordt opgebouwd (+, concatenatie en Kleene $*$).

   (b) Beschouw nu de volgende vier reguliere expressies $r_1, \ldots, r_4$:

   $$\begin{array}{ll} r_1 : & ((a(ba)^*)^* a(bba)^*)^* \\ r_2 : & ((aba)^* + abba)^* \\ r_3 : & ((\Lambda + a + ba)a + bba)^* \\ r_4 : & (a + ba)^*(a + bba)^* \end{array}$$

   Geef voor elk van de reguliere expressies r_1, r_2, r_3, r_4 aan, of die expressie dezelfde taal beschrijft als de reguliere expressie r_0.

   Zo nee, geef dan een string x met lengte $|x| \leq 5$, zó dat x wel in de taal van r_0 zit en niet in de taal van r_i of andersom. (Inderdaad, als r_0 en r_i niet dezelfde taal beschrijven, zal er bij deze expressies altijd zo'n x bestaan.) Geef uiteraard ook aan in welke van de twee talen x wel zit, en in welke niet.

---

5. (a) Geef een context-vrije grammatica G_1, zó dat

$$L(G_1) = \{a^{2j}b^j \mid j \geq 0\}$$

(b) Geef een context-vrije grammatica G_2, zó dat

$$L(G_2) = \{a^i b^j \mid 0 \leq i < 2j\}$$

Leg uit wat de functie is van de diverse variabelen en producties in G_2.

---

6. (a) Wanneer zeggen we dat een context-vrije grammatica $G = (V, \Sigma, S, P)$ in *Chomsky normaalvorm* is?

(b) Beschouw de context-vrije grammatica G met alfabet $\{a, b\}$, startvariabele S en producties

$$S \to XYZ \qquad X \to abXa \mid YY \qquad Y \to aY \mid \Lambda \qquad Z \to bZ \mid b$$

Construeer een context-vrije grammatica G' in Chomsky normaalvorm, zó dat $L(G') = L(G) - \{\Lambda\}$. Leg duidelijk uit hoe je aan je antwoord komt, en geef ook tussenresultaten.

---

7. (a) Geef een stapelautomaat M_1, zó dat

$$L(M_1) = \{a^{2j}b^j \mid j \geq 0\}$$

(b) Geef een succesvolle berekening in je stapelautomaat M_1 van onderdeel (a) voor de invoer $x = aaaabb$, dat wil zeggen: een berekening van de initiële configuratie $(q_0, aaaabb, Z_0)$ naar een accepterende configuratie. (Hierbij gaan we ervanuit dat de initiële toestand van M_1 q_0 heet en dat het initiële stapelsymbool Z_0 heet.)

Laat

$$L_2 = \{a^{i_1}b^{j_1}a^{i_2}b^{j_2} \mid 2i_1 > j_1 \geq 1 \text{ en } 2j_2 > i_2 \geq 1\}$$

Let op dat de rol van i en j hier wisselt: de eerste keer is $2i_1 > j_1$, de tweede keer is $2j_2 > i_2$.

(c) Geef de eerste vier elementen in de canonieke volgorde van L_2.

(d) Geef een stapelautomaat M_2, zó dat $L(M_2) = L_2$. Probeer ervoor te zorgen dat M_2 deterministisch is, geen Λ-transities kent, en zo weinig mogelijk toestanden heeft. Lukt dit niet, dan kun je nog wel een deel van de punten verdienen.

---

8. Laat

$$L = \{a^{i_1}b^{j_1}a^{i_2}b^{j_2}\dots a^{i_m}b^{j_m} \mid m \geq 0, \text{ en voor } k = 1, \dots, m \text{ geldt dat } i_k \geq j_k \geq 1\}$$

Het aantal a's is dus steeds minstens zo groot als het aantal daaropvolgende b's. Inderdaad, dit is de taal waarmee de huiswerkopgave dit jaar begon.

(a) Geef een Turing machine T, zó dat $L(T) = L$.
Leg ook uit hoe T werkt.

(b) Kies een woord x dat met een a begint en toch niet in de taal L zit, en geef aan op welke plaats in de Turing machine ontdekt wordt dat $x \notin L$. Wat gebeurt er op dat moment?
