TENTAMEN FUNDAMENTELE INFORMATICA 1 (I&E)
Maandag 16 december 2013, 14.00 - 17.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven. waarbij steeds tussen [en] staat hoeveel punten er ongeveer mee te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen.

Als je het antwoord op een onderdeel niet weet, en je hebt dat antwoord nodig bij een later onderdeel, dan kun je het antwoord 'kopen' bij de docent.

Geef gevraagde eindige automaten, stapelautomaten en Turing machines door middel van hun transitiediagram (het plaatje dus).

Als er bij een opgave gevraagd wordt om uitleg bij je antwoord, is het belangrijk dat je die ook geeft.

---

1. [6 pt]

   (a) Laat $L_1 = \{ab, \Lambda\}$ en $L_2 = \{aa, b, abb\}$. Wat is L_1L_2 in dit geval?

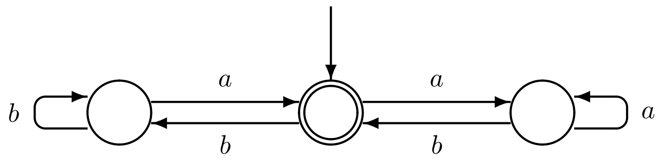
   (b) Laat L_1, L_2 en L_3 drie willekeurige talen zijn. Geldt altijd (dus voor elke L_1, L_2, L_3) dat
   $$L_2L_3 \subseteq (L_1 \cup L_2^*)L_3$$
   Zo ja, toon dit formeel aan. Zo nee, geef een voorbeeld van talen L_1, L_2 en L_3 waarvoor het niet geldt, en een string x die daar het bewijs van is.

---

2. [13 pt]

   (a) Laat L_1 de taal zijn die geaccepteerd wordt door de volgende eindige automaat M_1:

   M_1:

   Geef een reguliere expressie die met de taal L_1 overeenkomt.

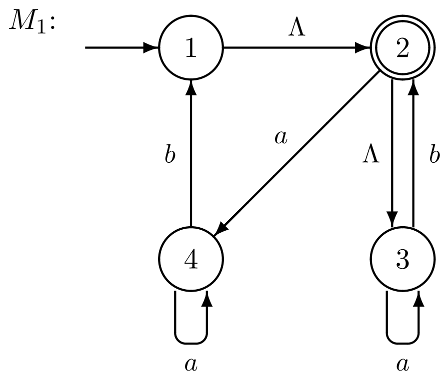
   Laat
   $$L_2 = \{x \in \{a, b\}^* \mid \ n_a(x) \text{ is even en } x \text{ bevat de substring } bb\}$$

   (b) Geef een reguliere expressie die met de taal L_2 overeenkomt.
   Beredeneer dat je expressie inderdaad precies met L_2 overeenkomt.

   (c) Geef een eindige automaat M zó dat $L(M) = L_2$.

---

3. [12 pt] Beschouw de volgende niet-deterministische eindige automaat (NFA) M_1:



(a) Construeer een NFA M_2 zonder Λ-transities, zó dat $L(M_2) = L(M_1)$.
Gebruik hiervoor de constructie uit het boek. Dit betekent in het bijzonder dat M_2 dezelfde toestanden heeft als M_1.

(b) Gebruik de subset-constructie om een (deterministische) eindige automaat M_3 te construeren, zó dat $L(M_3) = L(M_2)$. In je antwoord moet de relatie tussen M_2 en M_3 duidelijk zichtbaar zijn.

---

4. [26 pt] Laat
$$L_1 = \{ab^i a^j b^k \mid \ i,k \geq 0 \text{ en } j > i + k\}$$

(a) Geef de eerste vijf elementen van L_1 in de canonieke volgorde. Geef deze elementen ook in de canonieke volgorde.

(b) Geef een context-vrije grammatica G_1 zó dat $L(G_1) = L_1$. Leg uit wat de functie is van de diverse variabelen in G_1.

(c) Geef een stapelautomaat M_1 zó dat $L(M_1) = L_1$.
Probeer ervoor te zorgen dat M_1 deterministisch is, geen Λ-transities kent, en zo weinig mogelijk toestanden heeft. Lukt dit niet, dan kun je nog wel een deel van de punten verdienen.

Laat
$$L_2 = \{ab^i a^j b^k \mid \ i,j,k \geq 0 \text{ en } j < i + k\}$$

(d) Geef de eerste zes elementen van L_2 in de canonieke volgorde. Geef deze elementen ook in de canonieke volgorde.

(e) Geef een context-vrije grammatica G_2 zó dat $L(G_2) = L_2$. Leg uit wat de functie is van de diverse variabelen in G_2.

(f) Geef een stapelautomaat M_2 zó dat $L(M_2) = L_2$.
Probeer ervoor te zorgen dat M_2 deterministisch is, geen Λ-transities kent, en zo weinig mogelijk toestanden heeft. Lukt dit niet, dan kun je nog wel een deel van de punten verdienen.

---

5. [18 pt] Laat
$$L_1 = \{a^i b^j a^k \mid 0 \leq i \leq j < k\}$$

   (a) Geef de eerste zes elementen van L_1 in de canonieke volgorde. Geef deze elementen ook in de canonieke volgorde.

   Het pomplemma voor context-vrije talen luidt als volgt:

   Stel L is een context-vrije taal.
   Dan is er een integer n, zó dat
   voor iedere $u \in L$ waarvoor $|u| \geq n$, u geschreven kan worden als $u = vwxyz$
   voor bepaalde strings v, w, x, y en z waarvoor
   1. $|wy| > 0$ (dwz $wy \neq \Lambda$).
   2. $|wxy| \leq n$.
   3. Voor elke $m \geq 0$ behoort de string $vw^m xy^m z$ ook tot L.

   (b) Gebruik dit pomplemma om aan te tonen dat de taal L_1 niet context-vrij is. Ofwel: veronderstel dat L_1 wél context-vrij is, kies dan een geschikt woord $u \in L_1$ en toon aan dat x niet opgepompt en/of weggepompt kan worden. Vergeet ook niet om de conclusie te trekken.

   Kies voor u een van de volgende drie woorden:

$$u = a^n b^n a^n \qquad u = a^n b^n a^{n+1} \qquad u = a^n b^n a^{2n}$$

   Leg ook uit waarom de andere twee mogelijkheden voor u niet geschikt zijn.

---

6. [10 pt] Er zijn (1) reguliere grammatica's, (2) context-vrije grammatica's, (3) context-vrije grammatica's in Chomsky normaalvorm en (4) unrestricted grammatica's. Elk van deze grammatica's is te schrijven als een viertal (V, Σ, S, P).

   (a) Waar staan de letters V, Σ, S voor?

   (b) Leg bij elk van de vier soorten grammatica's duidelijk uit hoe de producties in P eruit zien.

---

7. [15 pt] Laat
$$L = \{a^i b^j c^k \mid 1 \leq i \leq j < k\}$$

   (a) Geef de eerste drie elementen van L in de canonieke volgorde. Geef deze elementen ook in de canonieke volgorde.

   (b) Construeer een Turing machine T die als invoer een string $x \in \{a, b, c\}^*$ heeft, en x accepteert dan en slechts dan als $x \in L$.

   Leg ook duidelijk uit hoe T werkt.