TENTAMEN COMPUTABILITY
Donderdag 31 maart 2022, 09.00 - 12.00 uur

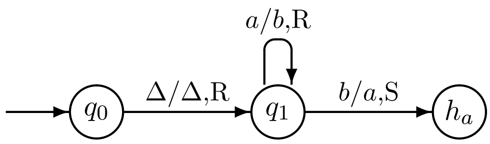
Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven, waarbij steeds tussen [en] staat hoeveel punten er ongeveer mee te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen. Wanneer er bij een vraag om uitleg, motivatie of toelichting gevraagd wordt, is het belangrijk om die ook te geven.

---

1. [26 pt] Laat
$$L = \{a^i b^i c^j \mid i, j \geq 0 \text{ en } i \neq j\}$$
   (a) Geef de eerste zes elementen in de canonieke volgorde van L.
   (b) Teken een gewone (deterministische, 1-tape) Turingmachine T, zó dat $L(T) = L$. Ofwel, T krijgt een invoer $x \in \{a, b, c\}^*$, en accepteert x dan en slechts dan als $x \in L$.
   Als je voor T gebruik wilt maken van componenten, zul je die componenten ook moeten uitwerken (tekenen dus).
   Hint: Controleer eerst of de letters in de invoer in de juiste volgorde staan.
   Leg ook duidelijk uit hoe T werkt.

---

2. [10 pt] De invoer van een universele Turing machine bestaat o.a. uit een codering van een Turing machine T. Dit is een string over $\{0, 1\}$.
   Beschouw onderstaande Turing machine T:



   Geef een codering $e(T)$ van T, waarbij je de functie e uit het boek gebruikt. Geef duidelijk aan, welk onderdeel van de Turing machine je waarmee codeert. Vermeld ook expliciet de gebruikte codering voor de individuele toestanden, tapesymbolen en richtingen.

---

3. [17 pt] Laat opnieuw
$$L = \{a^i b^i c^j \mid i, j \geq 0 \text{ en } i \neq j\}$$
   Geef een unrestricted grammar G, zó dat $L(G) = L$.
   Leg ook uit wat de functie is van de diverse variabelen en producties in G.

---

4. [22 pt]
   (a) Laat $L \subseteq \Sigma^*$ een taal zijn.
      i. Hoe is de karakteristieke functie χ_L gedefinieerd?
      Als je het antwoord op dit onderdeel niet weet, dan kun je het 'kopen' bij de docent. Wellicht kun je dan wel de hierna volgende onderdelen maken.
      ii. Als T een Turingmachine is die χ_L berekent, wat is dan de taal die T (gezien als *language acceptor*) accepteert? Motiveer je antwoord.

(b) We noemen een taal L recursief opsombaar als er een Turingmachine bestaat die L accepteert. We noemen een taal L recursief als er een Turingmachine bestaat die de karakteristieke functie χ_L berekent.

i. Toon aan dat als een taal L recursief is, dat L dan ook recursief opsombaar is. Doe dit door een Turingmachine te beschrijven (op het niveau van functionaliteit) die L accepteert. Deze Turingmachine mag (eventueel) meerdere tapes hebben.

ii. Geef een voorbeeld van een taal L die wel recursief opsombaar, maar niet recursief is.

iii. Toon aan dat als een taal $L \subseteq \Sigma^*$ en zijn complement L' allebei recursief opsombaar zijn, dat L dan recursief is. Doe dit door een Turingmachine te beschrijven (op het niveau van functionaliteit) die χ_L berekent. Deze Turingmachine mag (eventueel) meerdere tapes hebben.

---

5. [25 pt] Laat opnieuw

$$L = \{a^i b^i c^j \mid i, j \geq 0 \text{ en } i \neq j\}$$

Beschouw het volgende beslissingsprobleem:

Accepts-L: Gegeven een Turingmachine T_1, is $L(T_1) = L$ (voor de hierboven genoemde taal L) ?

(a) De stelling van Rice luidt als volgt:

Als R een niet-triviale taaleigenschap (language property) van Turingmachines is, dan is het beslissingsprobleem
P_R: Gegeven een Turingmachine T, heeft T eigenschap R ?
niet beslisbaar.

Toon aan dat beslissingsprobleem *Accepts-L* (voor de hierboven genoemde taal L) aan alle voorwaarden voor de stelling van Rice voldoet. Gebruik voor het aantonen van niet-trivialiteit concrete Turingmachines.

(b) Uit de stelling van Rice volgt dus dat *Accepts-L* niet beslisbaar is. We kunnen dit resultaat ook verkrijgen met behulp van een reductie vanaf het (niet-beslisbare) beslissingsprobleem *Accepts*-Λ, dat als volgt gedefinieerd is:

Accepts-Λ: Gegeven een Turingmachine T_2, is $\Lambda \in L(T_2)$?

Toon aan dat *Accepts*-$\Lambda \leq$ *Accepts-L* (voor de hierboven genoemde taal L). Laat uiteraard ook zien dat aan alle eisen van een reductie is voldaan.

Als je geen geschikte reductie tussen de twee beslissingsproblemen weet, kun je een deel van de punten verdienen door aan te tonen dat Accepts-$\Lambda \leq$ Accepts-abc*, waarbij* Accepts-abc *gedefinieerd wordt door*

Accepts-abc*: Gegeven een Turingmachine* T_3*, is* $abc \in L(T_3)$ *?*

Laat uiteraard ook in dit geval zien dat aan alle eisen van een reductie is voldaan.

`einde tentamen`